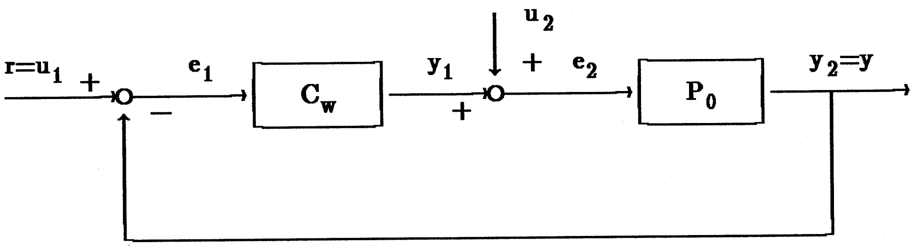
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Ι



Α.Ι.Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ

Ν.Π.Καραμπετάκης
Μεταπτ. Σπουδαστής Α.Π.Θ.
Υπότροφος Ι.Κ.Υ.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΕΚΔΟΣΗ : ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1992

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

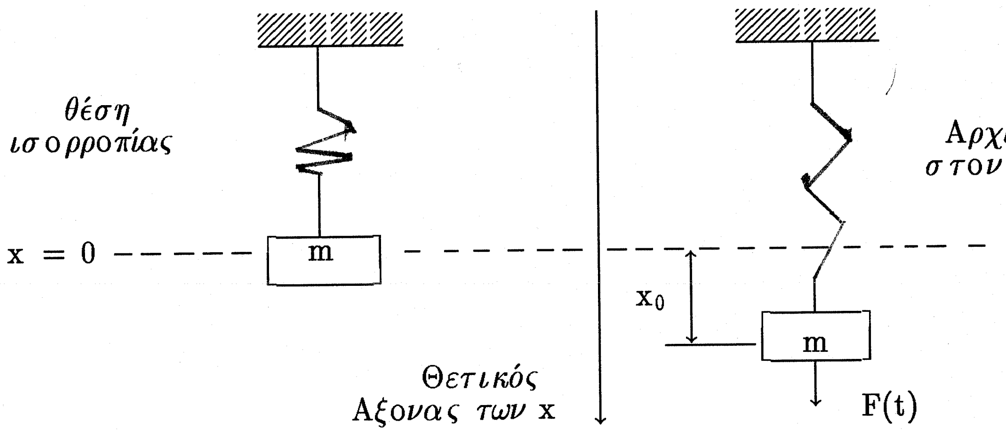
Προγράμματα Υπολογιστών

§ 1. *Σύστημα.*

$$x \Longrightarrow \boxed{\ f\ } \Longrightarrow fx$$

Ενα σύστημα είναι μια απεικόνιση f : X ⟶ Y *όπου* X *είναι ο χώρος των εισόδων ενώ* Y *είναι ο χώρος των εξόδων.*

Παράδειγμα 1 (*Παλλόμενο ελατήριο, Γραμμικό Σύστημα.*)

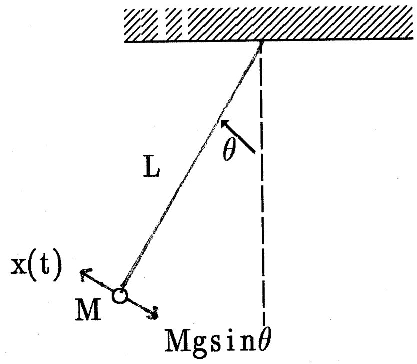


$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$F(t) \longrightarrow \boxed{\ f\ } \longrightarrow x(t)$$

Είναι ένα από τα γραμμικά συστήματα που θα επιλύσουμε παρακάτω. □

Παράδειγμα 2 (*Εκρεμμές, Μη γραμμικό σύστημα*)



$$l\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + MgL\sin\theta(t) = Lx(t) \qquad l=M(L^2)$$

$$Lx(t) \longrightarrow \boxed{\;f\;} \longrightarrow \theta(t)$$

Μέθοδοι επίλυσης

1) *Αριθμητικές* Μέθοδοι (Runge–Kutta method, Milne's method, Hamming's Method, *κ.λ.π.*)

2) *Γραμμικοποίηση του παραπάνω συστήματος υποθέτοντας ότι η γωνία* θ *είναι πολύ μικρή και συνεπώς* $\theta = \sin\theta$. □

<u>***Τι εννοώ όμως όταν λεω ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό ;***</u>

§2. Γραμμικά Συστήματα.

Ενα σύστημα λέγετε **γραμμικό** αν :

$$\forall\ x_1, x_2 \in X\ :\ f(\lambda x_1+\mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)\quad \text{με } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

δηλαδή αν	*η είσοδος* x_1 *παράγει την έξοδο* $y=f(x_1)$
και	*η είσοδος* x_2 *παράγει την έξοδο* $y=f(x_2)$
τότε	*η είσοδος* $\lambda x_1+\mu x_2$ *παράγει την έξοδο* $y = f(x_1) + f(x_2)$.

Θεώρημα *Ενα σύστημα Σ είναι γραμμικό αν η σχέση μεταξύ εισόδου–εξόδου μπορεί να περιγραφεί από μια γραμμική διαφορική εξίσωση :*

$$a_n(t)\,\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\,\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\,y(t) =$$
$$= b_m(t)\,\frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t)\,\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0(t)\,x(t)$$

Παράδειγμα 3

Τα δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικά :

a) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\,\dfrac{dx(t)}{dt} + 6\,x(t) = 3\sin(t)$

b) $\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 5t\,\dfrac{d\theta(t)}{dt} + 3t^2\,\theta(t) = 5t + 3t^2$ □

Παράδειγμα 4

Δίνεται το παρακάτω δυναμικό σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dx(t)}{dt} + 4\,x(t) = 10\sin(9t) + 7\sin(8t)$$

Ζητείται η έξοδος του συστήματος όταν $x(0)=0$ *και* $\dot{x}(0)=0$.

<u>*Βήμα* 1</u> Η *έξοδος για είσοδο* $u_1(t) = \sin(9t)$ *είναι*

$$x_1(t) = 0.083\sin(1.32t+0.48)e^{(-1.5t)} - 0.012\sin(9t+0.337)$$

<u>*Βήμα* 2</u> Η *έξοδος για είσοδο* $u_2(t) = \sin(8t)$ *είναι*

$$x_2(t) = 0.093\sin(1.32t+0.61)e^{(-1.5t)} - 0.015\sin(8t+0.38)$$

<u>*Βήμα* 3</u> Η *ολική έξοδος του συστήματος για είσοδο* $u(t) = 10\sin(9t) + 7\sin(8t)$ *είναι*

$$\begin{aligned} x(t) &= 10x_1(t) + 7x_2(t) = \\ &= 10\,[0.083\sin(1.32t+0.48)e^{(-1.5t)} - 0.012\sin(9t+0.337)] + \\ &\quad 7\,[0.093\sin(1.32t+0.61)e^{(-1.5t)} - 0.015\sin(8t+0.38)] \end{aligned}$$

□

§3. Μέθοδοι εύρεσης ολικής απόκρισης γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές.

Στο μάθημα της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων Ι θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\ f\ } \longrightarrow y(t)$$

των οποίων το μαθηματικό μοντέλο που τα περιγράφει είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{aligned} &a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = \\ &= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t) \end{aligned}$$

Σ'αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την επίλυση τέτοιων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

§3.1 Ελεύθερη απόκριση του συστήματος.

Η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

ονομάζεται **ομογενής** *διαφορική εξίσωση (είσοδο* $x(t)=0$*). Το πολυώνυμο*

$$a_n\,\rho^n + a_{n-1}\,\rho^{n-1} + \cdots + a_0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολύωνυμο** *της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης ενώ η παρακάτω αλγεβρική εξίσωση.*

$$a_n\,\rho^n + a_{n-1}\,\rho^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** *της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης του συστήματος ονομάζεται* **ελεύθερη απόκριση του συστήματος**.

Περίπτωση 1 (*Διαφορετικές πραγματικές ρίζες*)

Υποθέστε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι παρακάτω n *αριθμοί* :

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

Τότε η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

είναι η

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} + \cdots + c_n e^{m_n t}$$

Παράδειγμα 5 *Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση*

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\, y(t) = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης

$$\rho^2 + 5\rho + 6 = 0$$

είναι

$$\rho_1 = -2 \ \ \textit{και} \ \ \rho_2 = -3$$

επομένως η γενική λύση είναι η

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$ □

Παράδειγμα 6 *Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση*

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 4\,\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 6\, y(t) = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης

$$\rho^3 - 4\rho^2 + \rho + 6 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(\rho+1)(\rho^2-5\rho+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho+1)(\rho-2)(\rho-3) = 0$$

είναι

$$\rho_1 = -1 \ \ ; \ \ \rho_2 = 2 \ \ ; \ \ \rho_2 = 3$$

επομένως η γενική λύση είναι η

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3\, e^{3t}$$ □

Περίπτωση 2 (Επαναλαμβανόμενες πραγματικές ρίζες)

1) *Εαν η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορική εξίσωσης*

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

έχει την πραγματική ρίζα m *να επαναλαμβάνεται κ φορές τότε το μέρος της γενικής λύσης της ομογενούς που αντιστοιχεί σ'αυτήν την ρίζα είναι*

$$(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_k t^{k-1})\, e^{mt}$$

2) *Εαν οι υπόλοιπες ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές και διαφορετικές τότε η γενική λύση είναι η*

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_k t^{k-1})\, e^{mt} + c_1 e^{m_{k+1} t} + \cdots + c_n e^{m_n t}$$

3) Τέλος *εαν κάποια από τις υπόλοιπες ρίζες επαναλαμβάνεται τότε το μέρος της γενικής λύσης που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι το αντίστοιχο της λύσης* m *στην* 1.

Παράδειγμα 7

Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 8 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 24 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 32 \frac{dy(t)}{dt} + 16\, y(t) = 0$$

Παρατηρούμε *ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης*

$$\rho^4 + 8\rho^3 + 24\rho^2 + 32\rho + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho+2)^4 = 0$$

είναι η τετραπλή ρίζα

$$\rho = -2$$

και επομένως η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3)\, e^{-2t}$$

□

Παράδειγμα 8

Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} - 5\,\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\,\frac{dy(t)}{dt} - 8\,y(t) = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης

$$\rho^4 - 5\rho^3 + 6\rho^2 + 4\rho - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho-2)^3(\rho+1) = 0$$

είναι η τριπλή ρίζα

$$\rho = 2$$

στην οποία αντιστοιχεί και η γενική λύση

$$(c_1 + c_2t + c_3t^2)\,e^{2t}$$

καθώς και η απλή ρίζα

$$\rho = -1$$

στην οποία αντιστοιχεί και η γενική λύση

$$c_4e^{-t}$$

οπότε και η γενική λύση είναι η

$$y(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)\,e^{2t} + c_4e^{-t}$$ □

Περίπτωση 3 (*Μιγαδικές ρίζες*)

1) *Αν η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορική εξίσωσης*

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = 0$$

έχει ως ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς a+ib *και* a–ib, *οι οποίες δεν επαναλαμβάνονται τότε το μέρος της γενικής λύσης της ομογενούς που αντιστοιχεί σε αυτές τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες είναι*

$$y(t) = e^{at}(c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt))$$

2) *Αν όμως οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες* a+ib *και* a–ib *επαναλαμβάνονται κ φορές τότε το μέρος της γενικής λύσης της ομογενούς που αντιστοιχεί σε αυτές τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες πολλαπλότητας κ είναι*

$$y(t) = e^{at}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})\sin(bt) + e^{at}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})\cos(bt)$$

Παράδειγμα 9

Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης

$$\rho^2 + 1 = 0$$

είναι

$$\rho_1 = +i \quad \textit{και} \quad \rho_2 = -i$$

οπότε και η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = e^{0t}(c_1 \sin(1t) + c_2 \cos(1t)) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$ □

Παράδειγμα 10

Θεωρείστε την παρακάτω ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 20\,y(t) = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης

$$\rho^4 + \rho^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho-2)(\rho+2)(\rho^2+5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho-2)(\rho+2)(\rho+\sqrt{5}\,i)(\rho-\sqrt{5}\,i) = 0$$

είναι οι

$$\rho = 2 \;\; ; \;\; \rho = -2 \;\; ; \;\; \rho = \sqrt{5}\,i \;\; ; \;\; \rho = -\sqrt{5}\,i$$

οπότε και η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$y(t) = c_1\,e^{2t} + c_2\,e^{-2t} + c_3\sin(\sqrt{5}\,t) + c_4\cos(\sqrt{5}\,t)$$ □

Παράδειγμα 11

Θεωρείστε την ομογενή διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 5

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = 0$$

Να βρεθεί η λύση της για

$$y(0-) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{y}(0-) = 1$$

Ξέρω ότι η γενική λύση της παραπάνω διαφορικης εξίσωσης έχει την μορφή :

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$$

οπότε θα έχω το παρακάτω σύστημα

$$y(0-) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$\dot{y}(0-) = [-2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}]_{t=0} = -2c_1 - 3c_2 = 1$$

που έχει λύση

$$c_1 = 1 \quad \text{και} \quad c_2 = -1$$

οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$ □

§3.2 *Δυναμική απόκριση του συστήματος.*

Θεωρείστε την παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)$$

Η *λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης όταν* *<u>όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν</u>* *ονομάζεται* ***<u>δυναμική απόκριση</u>*** *του συστήματος.* Η *γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μπορείνα γραφεί ως*

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{dyn}(t) =$$
$$= (\textit{ελεύθερη απόκριση}) + (\textit{δυναμική απόκριση})$$

Υπολογισμός δυναμικής απόκρισης.

<u>*Βήμα* 1</u> Η *συνάρτηση βαρύτητας του συστήματος είναι*

$$w(t-\tau) = \textbf{\textit{συνάρτηση βαρύτητας του συστήματος}} =$$
$$= \begin{cases} c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) & t \geq 0- \\ 0 & t < 0- \end{cases}$$

$y_i(t)$ *είναι το σύνολο των γραμμικώς ανεξαρτήτων λύσεων της* ομογενούς *διαφορικής εξίσωσης και* c_i *προσδιορίζονται από τις σχέσεις* :

$$w(0-) = 0-, \left.\frac{dw(t)}{dt}\right|_{t=0-} = 0\ , \ldots ,\ \left.\frac{d^{n-2}w(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} = 0\ ,\ \left.\frac{d^{n-1}w(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1$$

<u>*Βήμα* 2</u>

Η *δυναμική απόκριση* $y_{dyn}(t)$ *δίνεται από τον παρακάτω τύπο*

$$y_{dyn}(t) = \int_0^t w(t-\tau)[b_m \frac{d^m x(\tau)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(\tau)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(\tau)]d\tau$$

Παράδειγμα 12 Να *βρεθεί η δυναμική απόκριση του παρακάτω συστήματος*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = t$$

<u>Βήμα 1</u> *Δεδομένου ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής μου εξίσωσης*

$$\rho^2 + 5\rho + 6 = 0$$

είναι οι

$$\rho_1 = -2 \quad \textit{και} \quad \rho_2 = -3$$

η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

οπότε η συνάρτηση βαρύτητας θα είναι της μορφής

$$w(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

όπου

$$w(0-) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$\dot{w}(0-) = [-2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}]_{t=0} = -2c_1 - 3c_2 = 1$$

και συνεπώς

$$c_1 = 1 \quad \textit{και} \quad c_2 = -1$$

οπότε η συνάρτηση βαρύτητας θα είναι

$$w(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

<u>Βήμα 2</u> Η *δυναμική απόκριση του συστήματος θα είναι*

$$y_{dyn}(t) = \int_0^t w(t-\tau)\tau d\tau = \int_0^t [e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}]\tau\, d\tau =$$

$$= e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\tau\, d\tau - e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}\tau\, d\tau = \frac{e^{-2t}}{2}\int_0^t \tau\, de^{2\tau} - \frac{e^{-3t}}{3}\int_0^t \tau\, de^{3\tau} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{2}\left\{ [\tau\, e^{2\tau}]_0^t - \int_0^t e^{2\tau} d\tau \right\} - \frac{e^{-3t}}{3}\left\{ [\tau\, e^{3\tau}]_0^t - \int_0^t e^{3\tau} d\tau \right\} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{2}\left\{ te^{2t} - \int_0^t e^{2\tau} d\tau \right\} - \frac{e^{-3t}}{3}\left\{ te^{3t} - \int_0^t e^{3\tau} d\tau \right\} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{2}\left\{ te^{2t} - \frac{1}{2}[e^{2\tau}]_0^t \right\} - \frac{e^{-3t}}{3}\left\{ te^{3t} - \frac{1}{3}[\, e^{3\tau}]_0^t \right\} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{2}\left\{ te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}\right\} - \frac{e^{-3t}}{3}\left\{ te^{3t} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}\right\} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{t}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} =$$

$$= \frac{t}{6} - \frac{5}{36} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-3t} \qquad \square$$

Παράδειγμα 13 *Να βρεθεί η δυναμική απόκριση του προηγούμενου συστήματος αλλά με είσοδο* $x(t) = \delta(t)$.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \delta(t)$$

Βήμα 1 Η *συνάρτηση βαρύτητας θα είναι η ίδια μια που είναι ανεξάρτητη από την είσοδο* $x(t)$ *και θα είναι*

$$w(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Βήμα 2 Η *δυναμική απόκριση του συστήματος θα είναι*

$$y_{dyn}(t) = \int_0^t w(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = w(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \qquad \square$$

Σημείωση Η *δυναμική απόκριση ενός συστήματος όταν η διέγερση γίνει από μια κρουστική συνάρτηση* $\delta(t)$ *ονομάζεται* ***κρουστική απόκριση*** *του συστήματος.*

Χρήσιμα Ολοκληρώματα Συνέλιξης

$$\int_0^t e^{a(t-\tau)}\tau^n\,d\tau = \frac{n!e^{at} - (a^n t^n + na^{n-1}t^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}t^{n-2} + \cdots + n!)}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^t e^{a(t-\tau)}\cos(k\tau)\,d\tau = \frac{ae^{at} - a\cos(kt) + k\sin(kt)}{a^2 + k^2}$$

$$\int_0^t e^{a(t-\tau)}\sin(k\tau)\,d\tau = \frac{ke^{at} - k\cos(kt) - a\sin(kt)}{a^2 + k^2}$$

$$\int_0^t u(t-\tau)\delta^{(n)}(\tau)\,d\tau = u^{(n)}(t)$$

Παράδειγμα 14 *Να βρεθεί η ολική απόκριση του παρακάτω συστήματος*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = t$$

για

$$y(0-) = 1 \quad \textit{και} \quad \dot{y}(0-) = -1$$

<u>*Βήμα 1*</u> *Βρίσκω την* <u>*ελεύθερη απόκριση*</u> *του συστήματος. Ξέρω ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι της μορφής*

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

οπότε

$$y(0-) = c_1 + c_2 = 1$$

$$\dot{y}(0-) = -2c_1 - 3c_2 = -1$$

που μας δίνει

$$c_1 = 2 \quad \textit{και} \quad c_2 = -1$$

οπότε η λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{hom}(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t}$$

<u>*Βήμα 2*</u> Η <u>*δυναμική απόκριση*</u> *του συστήματος είναι*

$$y_{dyn}(t) = \frac{t}{6} - \frac{5}{36} + \frac{1}{4}\,e^{-2t} - \frac{1}{9}\,e^{-3t}$$

<u>*Βήμα 3*</u> Η <u>*ολική απόκριση*</u> *του συστήματος θα είναι*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{hom}(t) + y_{dyn}(t) = \\ &= (\textit{ελεύθερη απόκριση}) + (\textit{δυναμική απόκριση}) \\ &= 2e^{-2t} - e^{-3t} + \frac{t}{6} - \frac{5}{36} + \frac{1}{4}\,e^{-2t} - \frac{1}{9}\,e^{-3t} = \\ &= \frac{9}{4}\,e^{-2t} - \frac{10}{9}\,e^{-3t} - \frac{5}{36} + \frac{t}{6} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 15 Να *βρεθεί η* ολ*ική απόκριση του παρακάτω συστήματος*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \delta(t)$$

για

$$y(0-) = 1 \quad \textit{και} \quad \dot{y}(0-) = -1$$

<u>*Βήμα* 1</u> Ε*λεύθερη απόκριση*

$$y_{hom}(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t}$$

<u>*Βήμα* 2</u> *Δυναμική απόκριση*

$$y_{dyn}(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

<u>*Βήμα* 3</u> Ο*λική απόκριση*

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{dyn}(t) =$$

$$= (\textit{ελεύθερη απόκριση}) + (\textit{δυναμική απόκριση})$$

$$= 2e^{-2t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

□

§4. Μόνιμη και μεταβατική απόκριση.

<u>Μόνιμη απόκριση</u> ή **<u>σταθερή απόκριση</u>** $y_{\mu o \nu}(t)$ *ενός συστήματος είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο <u>δεν τείνει στο 0</u> όταν ο <u>χρόνος t τείνει στο άπειρο</u>.*

<u>Μεταβατική απόκριση</u> *ενός συστήματος* $y_{\mu\varepsilon\tau}(t)$ *είναι το μέρος της ολικής απόκρισης το οποίο <u>τείνει στο 0</u> όταν ο <u>χρόνος t τείνει στο άπειρο</u>.*

$$\lim_{t \to \infty} y_{\mu\varepsilon\tau}(t) = 0$$

Παράδειγμα 16 *Θεωρείστε το δυναμικό σύστημα*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = t$$

με

$$y(0-) = 1 \quad \textit{και} \quad \dot{y}(0-) = -1$$

του οποίου η ολική απόκριση είναι

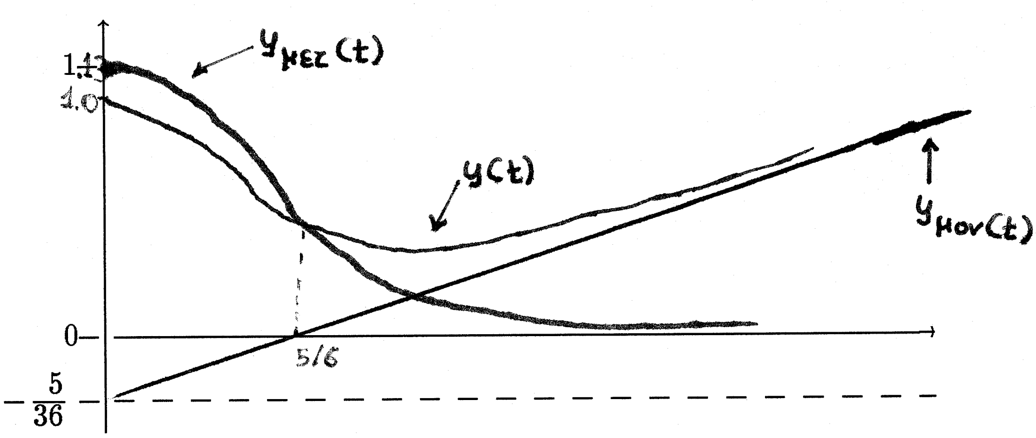
$$y(t) = \frac{9}{4}\,e^{-2t} - \frac{10}{9}\,e^{-3t} - \frac{5}{36} + \frac{t}{6}$$

Η *<u>μόνιμη απόκριση</u> του συστήματος θα είναι*

$$y_{\mu o \nu}(t) = -\frac{5}{36} + \frac{t}{6}$$

Η *<u>μεταβατική απόκριση</u> του συστήματος θα είναι*

$$y_{\mu\varepsilon\tau}(t) = \frac{9}{4}\,e^{-2t} - \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$



<u>*Ασκήσεις από* §1, §2, §3, §4.</u>

1) Να *βρεθεί η ελεύθερη απόκριση των παρακάτω συστημάτων* :

α) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} - 3\,\dfrac{dy(t)}{dt} - 2\,y(t) = t-1$

β) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} - 5\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\,\dfrac{dy(t)}{dt} + 13\,y(t) = \sin(t)$

2) Να *βρεθεί η δυναμική απόκριση των παρακάτω συστημάτων*

α) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 5\,\dfrac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \sin(t)$

β) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\,\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1$

3) Να *βρεθεί η* ολ*ική απόκριση του παρακάτω συστήματος*. Ακολούθως *να σχεδιασθεί η μόνιμη ,η μεταβατική και η* ολ*ική απόκριση του συστήματος στον ίδιο άξονα συντεταγμένων.*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\delta(t)$$

δεδομένου ότι $y(0-) = 2$ *και* $y^{(1)}(0-) = -2$.

4) Ποια *η κρουστική απόκριση του παρακάτω συστήματος.*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t) = t$$

§5. *Μετασχηματισμοί* Laplace *και συνήθεις συναρτήσεις εισόδου.*

Ορισμός Εστω f(t) *πραγματική συνάρτηση ορισμένη για* $t \geq 0-$.

$$\mathcal{L}\_[f(t)] \equiv F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

όπου $s=\sigma+j\omega$, $\sigma,\omega,\in\mathbb{R}$ $j=\sqrt{-1}$ (s=*μιγαδική μεταβλητή*) *και* F(s) ο *μετασχηματισμός* Laplace *της* f(t).

$$f(t) \xrightarrow{\quad \mathcal{L}\_ \quad} F(s)$$ □

<u>**Συνθήκη ύπαρξης της F(s)**</u>

$$\int_{0-}^{+\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t}dt < \infty$$

για κάποιο $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. □

<u>**Χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace**</u>

1) *Ανάγει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις καθώς και συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.*

2) Εύρεση ορίων *συναρτήσεων*. (Θεώρημα *αρχ. και τελικής τιμής*)

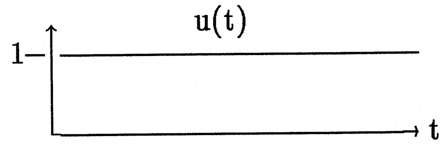
3) Μελέτη *συστημάτων στο* πεδίο *της συχνότητας*. (Κλασσικός Ελεγχος)

4) Inverse problem.

Χρήσιμοι συναρτήσεις εισόδου καθώς και μετασχηματισμοί Laplace.

α) Συνάρτηση "βαθμίδος ύψους 1".

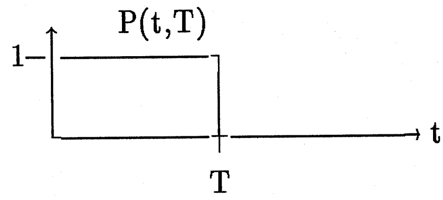
$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0- \\ 0 & t < 0- \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\_[u(t)] = \frac{1}{s}$$

β) Συνάρτηση τετραγωνικού παλμού.

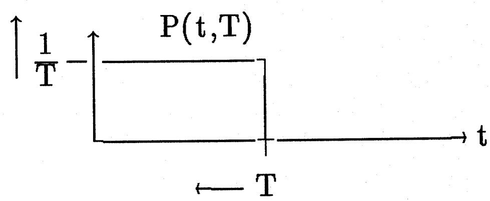
$$P(t,T) = u(t) - u(t-T)$$



$$\mathcal{L}\_[P(t,T)] = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$$

γ) Κρουστική συνάρτηση Dirac.

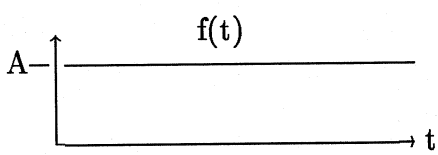
$$\delta(t) = \lim_{\substack{T \to 0- \\ T \geq 0-}} \left[\frac{u(t) - u(t-T)}{T}\right] \equiv \frac{d}{dt} P(t,T)$$



$$\mathcal{L}\_[\delta(t)] = 1,\ \mathcal{L}\_[\delta^{(1)}(t)] = s,\ \dots,\ \mathcal{L}\_[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

δ) Συνάρτηση βαθμίδος.

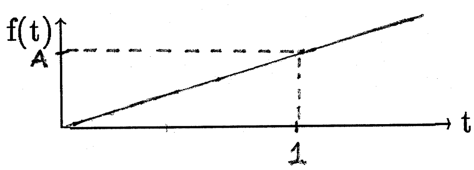
$$f(t) = \begin{cases} A & t \geq 0- \\ 0 & t < 0- \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\_[f(t)] = \frac{A}{s}$$

ε) Συνάρτηση ανωφέρειας.

$$f(t) = \begin{cases} At & t \geq 0- \\ 0 & t < 0- \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\_[f(t)] = \frac{A}{s^2},\ \mathcal{L}\_[At^2] = \frac{A\,2!}{s^3},\ \dots,\ \mathcal{L}\_[At^n] = \frac{A\,n!}{s^n}$$

ζ) $$\mathcal{L}\_[e^{-at}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}\_[e^{-at}\cos(\omega t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$ □

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace.

α) Η *φόρμουλα της παραγωγίσεως* :

$$\mathcal{L}\_\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}f^{(1)}(0-) - \cdots - f^{(n-1)}(0-)$$

Παράδειγμα 17 *Εφαρμόστε την φόρμουλα της παραγωγίσεως στην παρακάτω διαφορική εξίσωση* :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sin(3t)$$

με $\frac{dy(0)}{dt} = 4$ *και* $y(0) = 5$.

$$\mathcal{L}\_[\frac{d^2y(t)}{dt^2}] + \mathcal{L}\_[\frac{dy(t)}{dt}] + \mathcal{L}\_[y(t)] = \mathcal{L}\_[\sin(3t)] \Leftrightarrow$$

$$[s^2 y(s) - s^{2-1}y(0-) - s^{2-2}y^{(1)}(0-)] + [s\, y(s) - s^{1-1}y(0-)] + y(s) = \frac{3}{s^2+3^2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 y(s) - 5s - 4 + sy(s) - 5 + y(s) = \frac{3}{s^2+9} \Leftrightarrow$$

$$[s^2+s+1]\, y(s) = 5s + 9 + \frac{3}{s^2+9} = \frac{5s^3+9s^2+45s+84}{s^2+9} \Leftrightarrow$$

$$y(s) = \frac{5s^3+9s^2+45s+84}{(s^2+s+1)(s^2+9)}$$

□

β) *Θεώρημα μετατόπισης* :

$$\mathcal{L}\_[e^{at}f(t)] = F(s-a) \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{L}\_[\frac{1}{a} f(\frac{t}{a})] = F(as)$$

Παράδειγμα 18

$$\mathcal{L}\_[e^{3t}\sin(t)] = \frac{1}{(s-3)^2+1^2} = \frac{1}{s^2-6s+10}$$

$$\mathcal{L}\_[\sin(\frac{t}{3})] = 3\,\frac{1}{(3s)^2+1} = \frac{3}{9s^2+1}$$

γ) *Φόρμουλα πολλαπλασιασμού με μια δύναμη του* t.

$$\mathcal{L}\_[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Παράδειγμα 19

$$\mathcal{L}\_[\sin(kt)] = \frac{k}{s^2+k^2} \Longrightarrow \mathcal{L}\_[t\sin(kt)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\_[\cos(kt)] = \frac{s}{s^2+k^2} \Longrightarrow \mathcal{L}\_[t\cos(kt)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right] = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

δ) Φόρμουλα συνέλιξης :

$$\mathcal{L}_{-}\left[\int_{0-}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

Παράδειγμα 20 *Να λυθεί η εξίσωση :*

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \int_{0-}^{x}(x-y)g(y)dy$$

Εχουμε ότι

$$\mathcal{L}_{-}[g(x)] = \mathcal{L}_{-}[\frac{1}{2}x^2] - \mathcal{L}_{-}[\int_{0-}^{x}(x-y)g(y)dy] \Longrightarrow$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s^2}G(s) \Longrightarrow G(s)\,[1 + \frac{1}{s^2}] = \frac{1}{s^3} \Longrightarrow$$

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2+1}\frac{1}{s^3} = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2+1)} \Longrightarrow g(x) = 1 - \cos(x) \qquad \square$$

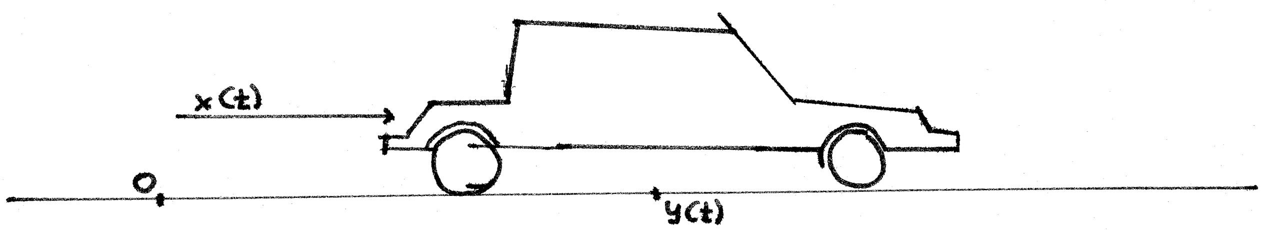
ε) Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής.

$$x(0-) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \qquad (\textit{θεωρ. αρχ.τιμής})$$

Αν $\lim_{t \to \infty} x(t)$ *υπάρχει τότε*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0-} sX(s) \qquad (\textit{θεωρ. τελικής τιμής})$$

Παράδειγμα 21 *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα μ.ε.μ.ε.*



που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_f \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

όπου M *η μάζα του αυτοκινήτου* k_f *ο συντελεστής τριβής* ($k_f > 0-$), x(t) *η δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο και* dy(t)/dt *η ταχύτητα του αυτοκινήτου. Να βρεθεί η τελική τιμή* $\lim_{t \to \infty} y(t)$ *εαν υπάρχει, δεδομένου ότι* x(t)=0–.

Λύση

$$\mathcal{L}\_[M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}] + \mathcal{L}\_[k_f \frac{dy(t)}{dt}] = 0 \Longrightarrow$$

$$M\,[s^2 y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-)] + k_f[sy(s) - y(0-)] = 0 \Longrightarrow$$

$$[Ms^2 + k_f s]y(s) = [Ms + k_f]y(0-) + My^{(1)}(0-) \Longrightarrow$$

$$y(s) = \frac{[Ms + k_f]\,y(0-) + My^{(1)}(0-)}{Ms^2 + k_f s} \Longrightarrow$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0-} sy(s) = \lim_{s \to 0-} s\,\frac{[Ms + k_f]\,y(0-) + My^{(1)}(0-)}{Ms^2 + k_f s} \Longrightarrow$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y(0-) + \frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)$$

□

§6. *Αντίστροφοι μετασχηματισμοί* Laplace *μιας ρητής συνάρτησης*.

Ορισμός Εστω $\mathcal{L}_{-}[f(t)] = F(s) \in \mathbb{R}(s)$ *τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *είναι γραμμικός μετασχηματισμός και ορίζεται ως* :

$$\mathcal{L}_{-}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \equiv f(t) \qquad \square$$

Σε πολλές περιπτώσεις καταλήγουμε σε μια ρητή συνάρτηση

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

όπου

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$$

της οποίας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace *ψάχνουμε. Παρακάτω βλέπουμε τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση αυτού του προβλήματος.*

Βήμα 1

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

όπου

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + \cdots + q_{m-n} s^{m-n}$$

το πηλίκο της διαίρεσης του N(s) *με το* D(s) *και* R(s) *το υπόλοιπο της διαίρεσης.* Τότε

$$\mathcal{L}_{-}^{-1}[Q(s)] = q_0 \delta(t) + q_1 \delta(t)^{(1)} + \cdots + q_{m-n} \delta(t)^{(m-n)}$$

Βήμα 2 Το *κλάσμα*

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

μπορεί να αναλυθεί ως

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{(s-z_1)^{m_1} \cdots (s-z_\mu)^{m_\mu}}{(s-p_1)^{n_1} \cdots (s-p_k)^{n_k}}$$

όπου p_i $i=1,2,\ldots,r$ *ρίζες του* $D(s)$ *πολλαπλότητας* n_i $(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$ *και* $z_i \neq p_k$ $i=1,2,\ldots,\mu$ *οι ρίζες του* $N(s)$ *πολλαπλότητας* m_i $(m_1+m_2+\cdots+m_\mu=n-1)$ *ή ισοδύναμα ως*

$$\frac{R(s)}{D(s)}=\frac{c_{11}}{(s-p_1)}+\frac{c_{12}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{c_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}}+$$
$$+\frac{c_{21}}{(s-p_2)}+\frac{c_{22}}{(s-p_2)^2}+\cdots+\frac{c_{1n_2}}{(s-p_2)^{n_2}}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{c_{k1}}{(s-p_k)}+\frac{c_{k2}}{(s-p_k)^2}+\cdots+\frac{c_{kn_k}}{(s-p_k)^{n_k}}$$

Οι σταθερές c_{ij} *δίνονται από τον παρακάτω τύπο :*

$$c_{ij}=\frac{1}{(n_i-j)!}\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]_{s=p_i}$$

ή καλύτερα για κάθε ρίζα πολλαπλότητας r *έχουμε*

$$\frac{c_1}{(s-p_i)}+\frac{c_2}{(s-p_i)^2}+\cdots+\frac{c_r}{(s-p_i)^r}$$

όπου

$$c_{r-j}=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-p_i)^r F(s)\right]_{s=p_i}$$

δηλαδή

$$c_r=\left[(s-p_i)^r F(s)\right]_{s=p_i}$$
$$c_{r-1}=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^r F(s)\right]_{s=p_i}$$
$$c_{r-2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^r F(s)\right]_{s=p_i}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Παράδειγμα 21 Να *βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της ρητής συνάρτησης*

$$X(s) = \frac{s^3+s^2-1}{s-1}$$

Βήμα 1 *Παρατηρώ αν εφαρμόσω το σχήμα* Horner *ότι*

$$\begin{array}{r|l} s^3+s^2-1 & s-1 \\ \cline{2-2} \underline{-s^3+s^2} & s^2+2s+2 \\ 2s^2-1 & \\ \underline{-2s^2+2s} & \\ 2s-1 & \\ \underline{-2s+2} & \\ 1 & \end{array}$$

οπότε

$$X(s) = s^2+2s+2 + \frac{1}{s-1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} x(t) = \delta(t)^{(2)}+2\delta(t)^{(1)}+2\delta(t)+e^t$$ □

Παράδειγμα 22 Να *βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της ρητής συνάρτησης*

$$X(s) = \frac{5s-1}{s^3-3s-2}$$

Βήμα 2 Η *συνάρτηση* X(s) *γράφεται ως*

$$X(s) = \frac{5s-1}{s^3-3s-2} = \frac{5s-1}{(s+1)^2(s-2)} = \frac{c_{11}}{(s+1)} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_{21}}{(s-2)}$$

$$c_{12} = [(s+1)^2X(s)]_{s=-1} = \left[\frac{5s-1}{s-2}\right]_{s=-1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$c_{11} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}[(s+1)^2X(s)]_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{5s-1}{s-2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{5(s-2)-(5s-1)\,1}{(s-2)^2}\right]_{s=-1}$$

$$= \left[\frac{-9}{(s-2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$c_{21} = [(s-2)X(s)]_{s=2} = \left[\frac{5s-1}{(s+1)^2}\right]_{s=2} = \frac{9}{9} = 1$$

οπότε

$$X(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s-2)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = -e^{-t} + 2te^{-t} + e^{2t}$$

Παράδειγμα 23 Να *βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της ρητής συνάρτησης*

$$X(s) = \frac{s^3+2s-4}{s^2+5s+6}$$

Βήμα 1

$$\begin{array}{rr|l} s^3+2s-4 & & s^2+5s+6 \\ \cline{3-3} -s^3-5s^2-6s & & s-5 \\ \cline{1-1} -5s^2-4s-4 & & \\ 5s^2+25s+30 & & \\ \cline{1-1} 21s+26 & & \end{array}$$

οπότε

$$X(s) = s-5 + \frac{21s+26}{s^2+5s+6}$$

Βήμα 2

$$\frac{R(s)}{D(s)} = \frac{21s+26}{s^2+5s+6} = \frac{21s+26}{(s+2)(s+3)} = \frac{c_{11}}{s+2} + \frac{c_{22}}{s+3}$$

$$c_{11} = [(s+2)\frac{R(s)}{D(s)}]_{s=-2} = \left[\frac{21s+26}{s+3}\right]_{s=-2} = \frac{-16}{1} = -16$$

$$c_{22} = [(s+3)\frac{R(s)}{D(s)}]_{s=-3} = \left[\frac{21s+26}{s+2}\right]_{s=-3} = \frac{-37}{-1} = +37$$

οπότε το X(s) *γράφεται αναλυτικά ως*

$$X(s) = s-5 + \frac{-16}{s+2} + \frac{37}{s+3} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = \delta(t)^{(1)} - 5\delta(t) - 16e^{-2t} + 37e^{-3t}$$ □

§6.1 Μια ειδική περίπτωση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (μιγαδικές ρίζες).

Θεωρείστε ότι

$$X(s) = \frac{c_{11}}{(s-p_i)} + \frac{c_{21}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{c_{r1}}{(s-p_i)^r} + \frac{c_{12}}{(s-\bar{p}_i)} + \frac{c_{22}}{(s-\bar{p}_i)^2} + \cdots + \frac{c_{r2}}{(s-\bar{p}_i)^r}$$

όπου $p_i = a_i + j\, b_i$. Παρατηρώ ότι

$$c_{r-j\ 1} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-p_i)^r F(s)\right]_{s=p_i}$$

$$c_{r-j\ 2} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-\bar{p}_i)^r F(s)\right]_{s=\bar{p}_i} = \bar{c}_{r-j\ 1}$$

και συνεπώς εαν

$$c_{r-j\ 1} = e_{r-j\ 1} + j\, d_{r-j\ 1}$$

τότε

$$c_{r-j\ 2} = e_{r-j\ 1} - j\, d_{r-j\ 1}$$

Εχω επίσης ότι

$$x(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = c_{11}e^{p_it} + \cdots + c_{r1}e^{p_it}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + c_{12}e^{\bar{p}_it} + \cdots + c_{r2}e^{\bar{p}_it}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \Rightarrow$$

$$x(t) = c_{11}e^{a_it}\,e^{jb_it} + \cdots + c_{r1}e^{a_it}\,e^{jb_it}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}$$
$$+ c_{12}e^{a_it}\,e^{-jb_it} + \cdots + c_{r2}e^{a_it}\,e^{-jb_it}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{a_it}[c_{11}[\cos(b_it)+j\sin(b_it)] + \cdots + c_{r1}[\cos(b_it)+j\sin(b_it)]\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}]+$$
$$+ e^{a_it}[\bar{c}_{11}[\cos(b_it)-j\sin(b_it)] + \cdots + \bar{c}_{r1}[\cos(b_it)-j\sin(b_it)]\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}] \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{a_it}\cos(b_it)\,[\,(c_{11}+\bar{c}_{11}) + \cdots + (c_{r1}+\bar{c}_{r1})\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,] +$$
$$+ e^{a_it}\sin(b_it)\,[\,(c_{11}-\bar{c}_{11}) + \cdots + (c_{r1}-\bar{c}_{r1})\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,] \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{a_it}\cos(b_it)\,[2\,[\mathrm{Re}(c_{11}) + \cdots + \mathrm{Re}(c_{r1})\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}]] -$$
$$- e^{a_it}\sin(b_it)\,[2\,[\mathrm{Im}(c_{11}) + \cdots + \mathrm{Im}(c_{r1})\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}]]$$

Εαν λάβουμε υπόψη μας την ταυτότητα

$$A\cos(bt) - B\sin(bt) = \sqrt{A^2+B^2}\,\cos(bt+\theta)$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{B}{A}) & A>0- \\ 180^0 + \tan^{-1}(\frac{B}{A}) & A<0- \end{cases}$$

τότε παίρνουμε ότι

$$x(t) = 2e^{a_i t}[|c_{11}|\cos(b_i t+\theta_1) + \cdots + |c_{r1}|\cos(b_i t+\theta_r)\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}]$$

$$\theta_i = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{Im(c_{i1})}{Re(c_{i1})}\right) & Re(c_{i1})>0- \\ 180^0 + \tan^{-1}\left(\frac{Im(c_{i1})}{Re(c_{i1})}\right) & Re(c_{i1})<0- \end{cases}$$ □

§6.2 Περιπτώσεις όπου δεν χρειάζεται η Laurent ανάπτυξη.

α) Περίπτωση δεύτερης τάξης.

$$X(s) = \frac{ds+e}{as^2+bs+c}$$

β) Περίπτωση τρίτης τάξης.

$$X(s) = \frac{s^2+b_1 s+b_0}{(as^2+bs+c)(s+k)} = \frac{ds+e}{as^2+bs+c} + \frac{g}{s+k}$$

Παρατηρώ ότι το β) ανάγετε στην α) περίπτωση.

Επίλυση

Χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$as^2+bs+c = a[(s+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]$$

και τους γνωστούς αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace

$$\mathcal{L}_-[e^{-at}\sin(bt)] = \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}_-[e^{-at}\cos(bt)] = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

και παίρνω ότι

$$X(s) = \frac{ds+e}{as^2+bs+c} =$$

$$= \frac{d}{a}\frac{(s+\frac{b}{2a})}{[(s+\frac{b}{2a})^2 + (\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}})^2} + \frac{(e-\frac{db}{2a})}{a\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}\frac{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}{[(s+\frac{b}{2a})^2 + (\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}})^2} \Longrightarrow$$

$$x(t) = \frac{d}{a}e^{(-\frac{b}{2a}t)}\cos(\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}t) + \frac{(e-\frac{db}{2a})}{a\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}e^{(-\frac{b}{2a}t)}\sin(\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}t)$$

Παράδειγμα 24 Να *βρεθεί* ο *αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της ρητής συνάρτησης*

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4s+5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2(2s)+2^2-2^2+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2+1^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2-2}{(s+2)^2+1^2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2}\right] - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right] = e^{-2t}\cos t - 2\,e^{-2t}\sin t =$$

$$= e^{-2t}(\cos t - 2\sin t) = e^{-2t}\sqrt{1^2+2^2}\,\cos(t+\theta) = e^{-2t}\sqrt{5}\,\cos(t+\theta)$$

όπου

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{1}\right) = \tan^{-1}(-2) = -70.48^0$$

□

Παράδειγμα 25 Να *βρεθεί* ο *αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της ρητής συνάρτησης*

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+s+2)}$$

Εστω

$$\frac{1}{s(s^2+s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2} = \frac{(A+B)s^2 + (A+C)s + 2A}{s(s^2+s+2)} \Longrightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{-1}{2} \quad C = \frac{-1}{2}$$

οπότε έχω

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\,\frac{s+1}{s^2+s+2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\,\frac{(s+(1/2)) - (1/2)}{s^2+2(1/2)s+(1/2)^2-(1/2)^2+2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\,\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{7}{4}})^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\,\frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{7}{4}})^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{7}}{14}\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

□

§7. Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Εστω

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t) \overset{\mathcal{L}_-}{\Longrightarrow}$$

$$a_n[s^n y(s) - s^{n-1}y(0-) - \cdots - y^{(n-1)}(0-)] + a_{n-1}[s^{n-1}y(s) - s^{n-2}y(0-) - \cdots - y^{(n-2)}(0-)] + \cdots + a_0 y(s)$$

$$= b_m[s^m x(s) - s^{m-1}x(0-) - \cdots - x^{(m-1)}(0-)] + b_{m-1}[s^{m-1}x(s) - s^{m-2}x(0-) - \cdots - x^{(m-2)}(0-)] + \cdots + b_0 x(s)$$

$$\Leftrightarrow a(s)y(s) = b(s)x(s) + [s^{n-1}\ s^{n-2}\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0-) \\ y^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0-) \end{bmatrix} -$$

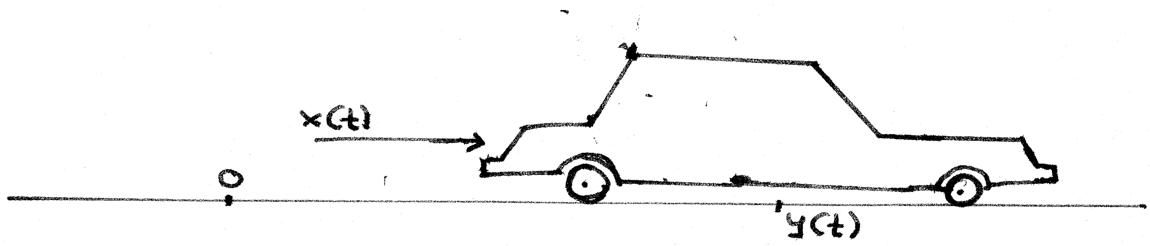
$$[s^{m-1}\ s^{m-2}\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0-) \\ x^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(0-) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{a(s)}\left\{[s^{n-1}\ s^{n-2}\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0-) \\ y^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0-) \end{bmatrix}\right\} +$$

$$\frac{1}{a(s)}\left\{b(s)x(s) - [s^{m-1}\ s^{m-2}\ \cdots\ 1]\begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0-) \\ x^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(0-) \end{bmatrix}\right\}$$

$y(t) \equiv \mathcal{L}_-^{-1}[y(s)] = y_{hom}(t) + y_{dyn}(t) =$ (*ελεύθερη απόκριση*) + (*δυναμική απόκριση*) □

Παράδειγμα 26 *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα μ.ε.μ.ε.*



που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$M\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + k_f\,\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

όπου M *η μάζα του αυτοκινήτου* k_f *ο συντελεστής τριβής* (k_f>0–), x(t) *η δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο και* dy(t)/dt *η ταχύτητα του αυτοκινήτου.* Να *βρεθεί η* y(t) *δεδομένου ότι* x(t)=0.

Λύσις

$$\mathcal{L}\_[M\,\frac{d^2y(t)}{dt^2}] + \mathcal{L}\_[k_f\,\frac{dy(t)}{dt}] = 0 \Longrightarrow$$

$$M\,[s^2y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-)] + k_f[sy(s) - y(0-)] = 0 \Longrightarrow$$

$$[Ms^2 + k_f s]y(s) = [Ms + k_f]y(0-) + My^{(1)}(0-) \Longrightarrow$$

$$y(s) = \frac{[Ms+k_f\,]\,y(0-) + My^{(1)}(0-)}{Ms^2 + k_f s} = \frac{c_{11}}{s} + \frac{c_{22}}{s+(k_f/M)}$$

όπου c_{11} *και* c_{22} *προσδιορίζονται από*

$$c_{11} = [s\,y(s)]_{s=0} = \left[\frac{[Ms+k_f\,]\,y(0-) + My^{(1)}(0-)}{Ms + k_f}\right]_{s=0} = y(0-) + \frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)$$

$$c_{22} = [(s+(k_f/M))\,y(s)]_{s=-(k_f/M)} =$$

$$= \left[\frac{[Ms+k_f]y(0-) + My^{(1)}(0-)}{Ms}\right]_{s=-(k_f/M)} = -\frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)$$

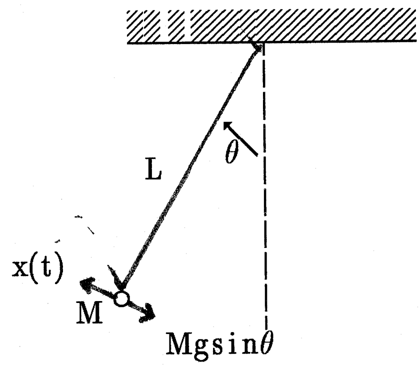
οπότε η λύσις y(t) *θα δίνεται από :*

$$y(t) \equiv \mathcal{L}_-^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}_-^{-1}[[y(0-) + \frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)]\,\frac{1}{s}] + \mathcal{L}_-^{-1}[-\frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)\frac{1}{s+(k_f/M)}] \Longrightarrow$$

$$y(t) = y(0-) + \frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-) - \frac{M}{k_f}\,y^{(1)}(0-)e^{-\frac{K_f}{M}t}$$

□

Παράδειγμα 27 *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα μ.ε.μ.ε.*



που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\ell \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + MgL\sin\theta(t) = Lx(t) \qquad \ell = M(L^2)$$

Για μια μικρή γωνία θ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\theta(t)=\sin(\theta(t))$. *Ποιά θα είναι η έξοδος* $\theta(t)$ *του συστήματος εαν το σύστημα βρισκόταν στην αρχική θέση ισσοροπίας* ($\theta(0-)=0$, $d\theta(0-)/dt = 0$) *και* $x(t)=\delta(t)$.

Λύσις

$$\mathcal{L}\_[\ell \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}] + \mathcal{L}\_[MgL\theta(t)] = \mathcal{L}\_[L\delta(t)] \Longrightarrow$$

$$\ell\,[s^2\theta(s)-s\theta(0-)-\theta^{(1)}(0-)] + MgL\theta(s) = L \Longrightarrow$$

$$[\ell s^2+MgL]\theta(s) = L \Longrightarrow \theta(s) = \frac{L}{(\ell s^2+MgL)} = \frac{L}{\ell}\,\frac{1}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{MgL}{\ell}}\right)^2} \Longrightarrow$$

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{L}{\ell}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{MgL}{\ell}}}\,\frac{\sqrt{\frac{MgL}{\ell}}}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{MgL}{\ell}}\right)^2}\right] = \sqrt{\frac{L}{Mg\ell}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{MgL}{\ell}}\,t\right)$$

□

<u>*Ασκήσεις* §5, §6, §7.</u>

1) *Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα μ.ε.μ.ε. που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\,\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 4\,\frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

Υπολογίστε *την* y(t) *στις παρακάτω περιπτώσεις* :

α) $y(0-)= -2,\ y^{(1)}(0-)=1,\ x(t)=0,\ \ t\geq 0-$

β) $y(0-)= 0,\ y^{(1)}(0-) = 0,\ x(t)=\delta(t)\ \ t\geq 0-$

γ) $y(0-)= -2,\ y^{(1)}(0-)= 1,\ x(t)=u(t)\ \ t\geq 0-$

2) Να *λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις* :

α) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \beta^2\, y(t) = A\sin(wt) \qquad y(0-)=1,\ y^{(1)}(0-)=0-$

β) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3te^{-t} \qquad y(0-)=4,\ y^{(1)}(0-)=2$

γ) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = t \qquad y(0-)= -3,\ y(1)=-1$

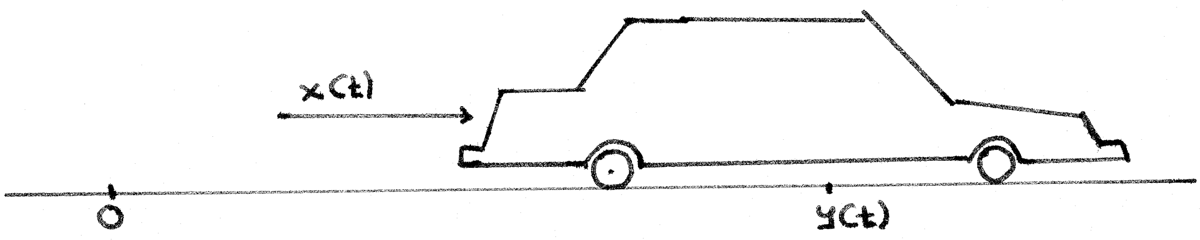
3) Να *βρεθούν* οι *αντίστροφοι μετασχηματισμοί* Laplace *των παρακάτω ρητών συναρτήσεων*

α) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^4-s^2+1}{s^2+3s+1}\right]$

β) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s-2}{s^2(s+2)(s-1)}\right]$

γ) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right]$

4) *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα μ.ε.μ.ε.*



που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + k_f \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

όπου M *η μάζα του αυτοκινήτου* k_f *ο συντελεστής τριβής* (k_f>0–), x(t) *η δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο και* dy(t)/dt *η ταχύτητα του αυτοκινήτου.* Να *βρεθεί μια* ομαλή *δύναμη* x(t) (x(s)≡$\mathcal{L}$_[x(t)]=N(s)/D(s) *με* degN(s)<degD(s))*η* οποία *θα μετακινήσει* το *αυτοκίνητο από την αρχική θέση* y(0–)=0 *στην θέση* y(10)=100 *σε χρόνο* t=10 *αν υποθέσουμε ότι η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου* $\dot{y}$(0–) *είναι* 0 *και θέλουμε η τελική ταχύτητα* $\dot{y}$(10) *στον χρόνο* t=10 *να είναι πάλι μηδέν.*

§8. *Συνάρτηση μεταφοράς.*

Θεωρείστε ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μ.ε.μ.ε. που περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)$$

<u>**Ορισμός**</u> Η ***συνάρτηση μεταφοράς*** *του παραπάνω συστήματος* ορίζεται *ως* ο *λόγος του μετασχηματισμού* Laplace *της εξόδου* y(t) *πρός τον μετασχηματισμό* Laplace *της εισόδου* x(t) *με την προυπόθεση ότι όλες οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδέν.*

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}y(t)}{\mathcal{L}x(t)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$ □

<u>**Ορισμός**</u> Εστω *ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού μη χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος αναλύεται ως*

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s-z_1)^{m_1} \cdots (s-z_\mu)^{m_\mu}}{(s-p_1)^{n_1} \cdots (s-p_k)^{n_k}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Οι μιγαδικές τιμές $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ *ονομάζονται* ***μηδενικά*** *του συστήματος, ενώ οι μιγαδικές τιμές* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *ονομάζονται* ***πόλοι*** *του συστήματος.* Το *πολυώνυμο* $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$ *ονομάζεται* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του συστήματος.* □

<u>**Σημείωση**</u>

1) Η *συνάρτηση μεταφοράς μας δίνει την περιγραφή του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας και το σύστημα μου στο πεδίο της συχνότητας συμβολίζεται ως*

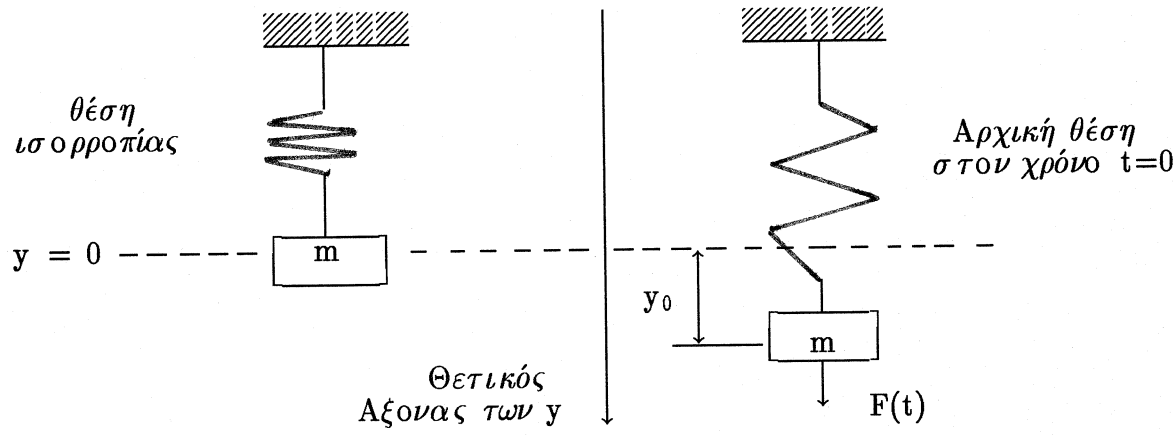
$$\xrightarrow{x(s)} \boxed{H(s)} \xrightarrow{y(s)}$$

$$Y(s) = H(s)\, X(s)$$

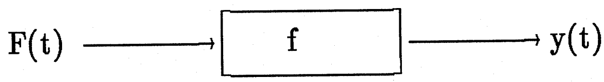
2) Η *θέση των μηδενικών* (x) *και των πόλων* (o) *στο μιγαδικό επίπεδο παίζει μεγάλη σημασία στη στην συμπεριφορά του συστήματος.*

3) Η *συνάρτησηη μεταφοράς περιγράφει πλήρως το σύστημα μου από την στιγμή που δεν υπάρχουν απλοποιήσεις μεταξύ των πόλων και των μηδενικών του συστήματος.*

Παράδειγμα 28 *Εστω το παρακάτω γραμμικό σύστημα :*



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y(t) = \frac{F(t)}{m}$$



Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δεδομένου ότι m=1, a=5, k=6 *καθώς και οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος.*

Λύση

Η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = F(t)$$

οπότε αν πάρω μετασχηματισμούς Laplace *με μηδενικές αρχικές συνθήκες έχω*

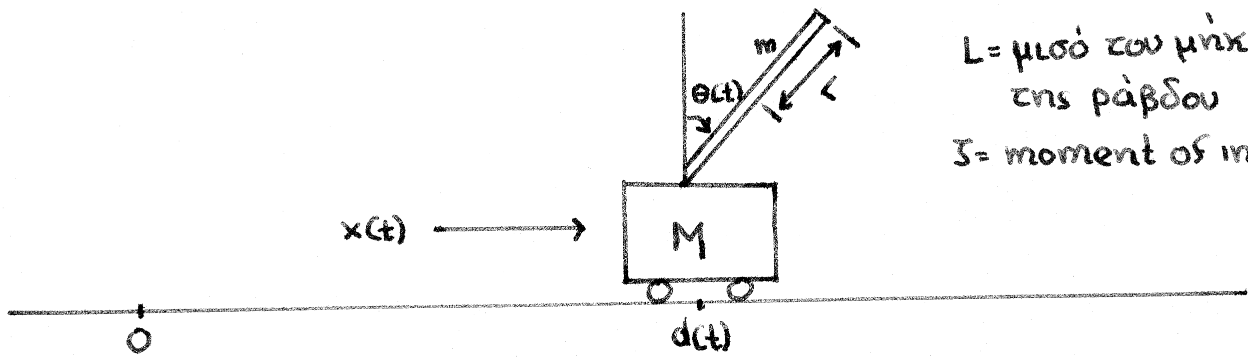
$$s^2y(s)+5sy(s)+6y(s) = F(s) \Longrightarrow (s^2+5s+6)\,y(s) = F(s)$$

και συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θα είναι

$$H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Οι πόλοι του συστήματος θα είναι $\rho_1=-2$ *και* $\rho_2=-3$. *Μηδενικά δεν υπάρχουν.* □

Παράδειγμα 29 *Εστω το παρακάτω δυναμικό σύστημα*



L = μισό του μήκους της ράβδου
J = moment of inertia.

που περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$(J+mL^2)\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgL\,\sin\theta(t) + mL\,\frac{d^2d(t)}{dt^2}\cos\theta(t) = 0$$

$$(M+m)\,\frac{d^2d(t)}{dt^2} + mL\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = x(t)$$

Εαν υποθέσουμε ότι η γωνία $\theta(t)$ *είναι μικρή να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δεδομένου ότι η έξοδος είναι η* $\theta(t)$ *και η είσοδος η* $x(t)$.

Λύση

Για μικρή γωνία $\theta(t)$ *έχω* $\cos(\theta(t)) = 1$ *και* $\sin(\theta(t)) = \theta(t)$ *οπότε αν πάρω μετασχηματισμούς* Laplace *με μηδενικές αρχικές συνθήκες έχω*

$$\left.\begin{aligned}(J+mL^2)s^2\theta(s) - mgL\theta(s) + mLs^2d(s) = 0\\ (M+m)s^2d(s) + mLs^2\theta(s) = x(s)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}s^2d(s) = \frac{-mL}{(M+m)}\,s^2\theta(s) + \frac{1}{(M+m)}\,x(s)\\ (J+mL^2)s^2\theta(s) - mgL\theta(s) + mL\left[\frac{-mL}{(M+m)}\,s^2\theta(s) + \frac{x(s)}{(M+m)}\right]\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

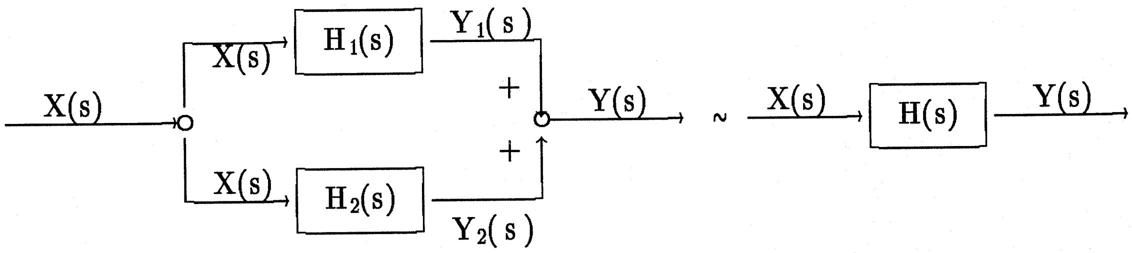
$$\left[\left[J+mL^2 - \frac{m^2L^2}{(M+m)}\right]s^2 - mgL\right]\theta(s) = -\frac{mL^2}{(M+m)}\,x(s) \Longrightarrow$$

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{x(s)} = \frac{-mL^2}{(JM+Jm+mML^2)s^2 - mgL(M+m)}$$

□

§8.1 Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς συνδεόμενων συστημάτων.

Α) Παράλληλη σύνδεση.



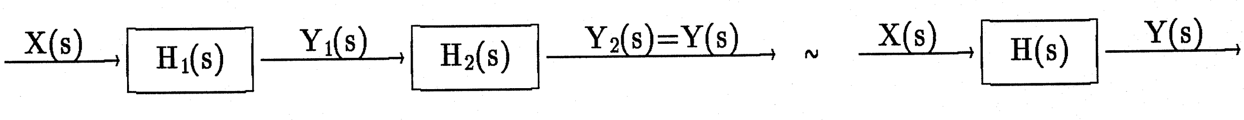
Δεδομένου ότι :

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ Y_1(s) &= H_1(s)X(s) \\ Y_2(s) &= H_2(s)X(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= [H_1(s) + H_2(s)]X(s) \\ &= H(s)\,X(s) \end{aligned}$$

η συνάρτηση μεταφοράς της παράλληλης σύνδεσης θα είναι :

$$\boxed{H(s) = H_1(s) + H_2(s)}$$ □

Β) Σύνδεση σε σειρά.



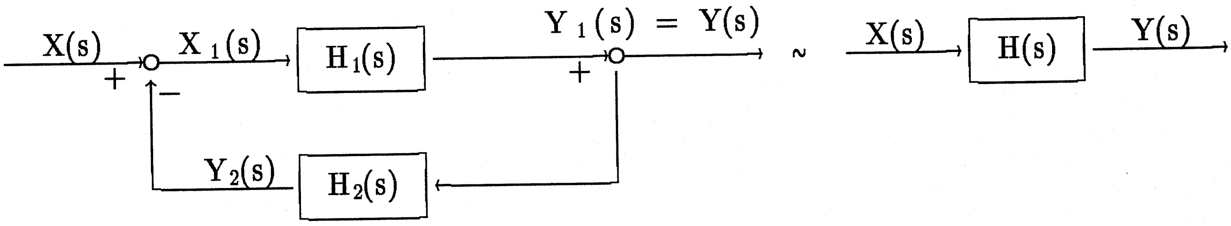
Δεδομένου ότι :

$$\left.\begin{aligned} Y(s) = Y_2(s) &= H_2(s)Y_1(s) \\ Y_1(s) &= H_1(s)X(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} Y(s) &= H_2(s)\,[\,H_1(s)X(s)] \\ &= [\,H_2(s)\,H_1(s)\,]\,X(s) \\ &= H(s)\,X(s) \end{aligned}$$

η συνάρτηση μεταφοράς της σύνδεσης σε σειρά θα είναι :

$$\boxed{H(s) = H_1(s)\;H_2(s)}$$ □

<u>Γ) Ανάδραση εξόδου.</u>



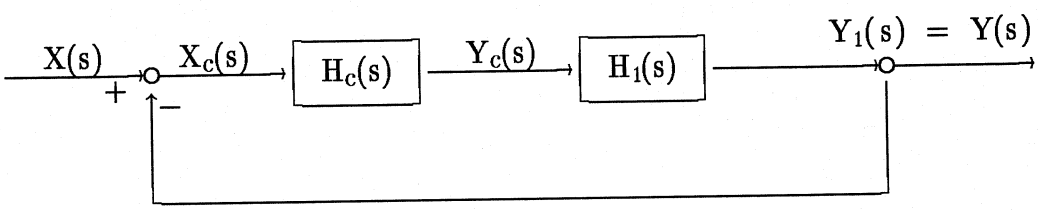
Δεδομένου ότι :

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = H_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) &= X(s) - Y_2(s) \\ Y_2(s) &= H_2(s)Y(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &Y(s) = H_1(s)\,[X(s) - H_2(s)Y(s)] \Leftrightarrow \\ &[1 + H_1(s)H_2(s)]\,Y(s) = H_1(s)X(s) \Leftrightarrow \\ &\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \end{aligned}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος μετά από ανάδραση εξοδου θα είναι :

$$\boxed{H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}} \qquad \square$$

Παράδειγμα 30 Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω συστήματος :



Δεδομένου ότι :

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = H(s)Y_c(s) \\ Y_c(s) &= H_c(s)X_c(s) \\ X_c(s) &= X(s) - Y(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &Y(s) = H(s)H_c(s)\,[X(s) - Y(s)] \Leftrightarrow \\ &[1 + H(s)H_c(s)]\,Y(s) = H(s)H_c(s)X(s) \Leftrightarrow \\ &\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)H_c(s)}{1 + H(s)H_c(s)} \end{aligned}$$

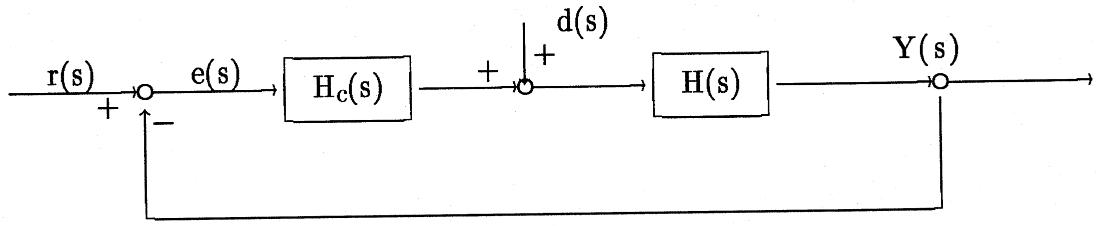
η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος θα είναι :

$$H(s) = \frac{H(s)H_c(s)}{1 + H(s)H_c(s)} \qquad \square$$

§8.2 Προβλήματα Κλασσικής Θεωρίας Ελέγχου.

Tracking Problem

Υποθέτουμε ότι η έξοδος ενός συστήματος y(t) *μπορεί να μετρηθεί με ένα* sensor. Η *μετρούμενη ποσότητα* y(t) *μπορεί να διοχετευθεί ώς είσοδο όπως φαίνεται παρακάτω*



Το *πρόβλημα είναι να σχεδιασθεί ένας* controller $H_c(s)$ *τέτοιος ώστε το*

$$e(t) = r(t) - y(t) \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty$$

όπου

$$H_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad \text{με} \quad \deg N_c(s) < \deg D_c(s)$$

Εφαρμογή : (*θερμοσίφωνας*, speed controller,...) □

Inverse Problem

Δεδομένου ότι έχουμε ένα γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς H(s), *στόχος μας είναι να υπολογίσουμε μια* ομαλή *είσοδο* x(t) ($\mathcal{L}x(t) = N(s)/D(s)$ *όπου* $\deg N(s) < \deg D(s)$ *η* οποία *θα μας δίνει μια δεδομένη* έξοδο y(t) *για* $t>0-$.

Εφαρμογή : Δες *άσκηση* 4 *από κεφάλαιο* §5,6. □

§9. Κρουστική απόκριση συστήματος.

__*Ορισμός*__ Η ***κρουστική απόκριση*** h(t) *ενός γραμμικού συστήματος* Σ *ορίζεται ως η δυναμική απόκριση του συστήματος όταν έχω ως είσοδο την κρουστική απόκριση* δ(t). □

Από §7 *βλέπουμε ότι εαν έχω ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μ.ε.μ.ε. που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :*

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 \, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 \, x(t)$$

τότε για $y(0-) = y^{(1)}(0-) = \cdots = y^{(n-1)}(0-) = 0$ *και* $x(t)=\delta(t)$ (*και συνεπώς* $x(0-) = x^{(1)}(0-) = \cdots = x^{(m-1)}(0-) = 0$) *παίρνω ότι*

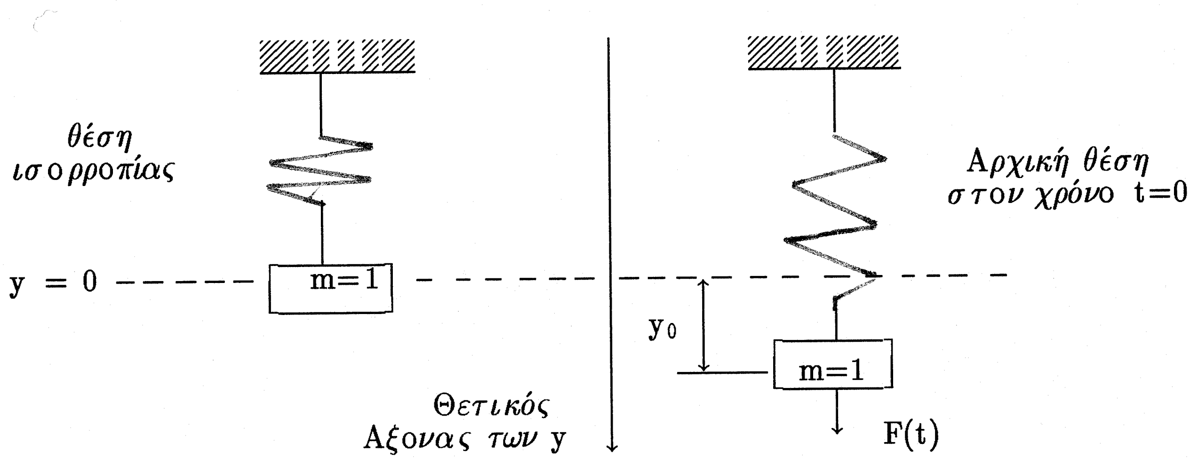
$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)\, y_{dyn}(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_0 \Longrightarrow$$

$$y_{dyn}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = H(s) \Longrightarrow$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_{dyn}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

Συμπέρασμα Η *κρουστική απόκριση* h(t) *δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό* Laplace *της συνάρτησης μεταφοράς* H(s) *του συστήματος.* □

Παράδειγμα 31 *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό δυναμικό σύστημα :*



που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dy(t)}{dt} + 2\,y(t) = F(t)$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση h(t) *του συστήματος.*

Λύση

Η *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι*

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

και συνεπώς η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{s+1}\right]$$

όπου

$$c_1 = [(s+2)H(s)]_{s=-2} = \left[\frac{1}{s+1}\right]_{s=-2} = -1$$

$$c_2 = [(s+1)H(s)]_{s=-1} = \left[\frac{1}{s+2}\right]_{s=-1} = 1$$

και συνεπώς

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}\right] \Longrightarrow$$

$$h(t) = -\,e^{-2t} + e^{-t}$$

□

§10. Ευστάθεια του συστήματος.

<u>**Ορισμός**</u> Ενα γραμμικό σύστημα Σ λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν η κρουστική απόκριση h(t) τείνει στο μηδέν καθώς καθώς το t τείνει στο ∞. Το γραμμικό σύστημα Σ λέγεται **ευσταθές στον κύκλο M** αν $\|h(t)\|<M$ καθώς το t τείνει στο ∞. □

Παράδειγμα 32 Δίνεται ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα Σ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Είναι το παρακάτω σύστημα ευσταθές ;

Λύση

Η κρουστική απόκριση h(t) του συστήματος Σ είναι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = e^{-2t} - e^{-3t}$$

και

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} [e^{-2t} - e^{-3t}] = 0$$

άρα το Σ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. □

Παράδειγμα 33 Δίνεται ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα Σ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Είναι το παραπάνω σύτημα ευσταθές ;

Λύση

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin(t)$$

και

$$\|h(t)\| = \|\sin(t)\| \leq 1 \quad \forall\ t\in\mathbb{R}$$

άρα το Σ είναι ευσταθές στον κύκλο ακτίνας 1. □

§10.1 Οι πόλοι ως κριτήριο ευστάθειας του συστήματος.

Θεωρείστε ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μ.ε.μ.ε. που περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)$$

όπου $m<n$. Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{R(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{(s-z_1)^{m_1} \cdots (s-z_\mu)^{m_\mu}}{(s-p_1)^{n_1} \cdots (s-z_k)^{n_k}}$$

όπου p_i $i=1,2,\ldots,r$ οι πόλοι του συστήματος πολλαπλότητας n_i $(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$ και z_i $i=1,2,\ldots,\mu$ οι ρίζες του του συστήματος πολλαπλότητας m_i $(m_1+m_2+\cdots+m_\mu = n-1)$ ή ισοδύναμα

$$H(s) = \frac{R(s)}{D(s)} = \frac{c_{11}}{(s-p_1)} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$
$$+ \frac{c_{21}}{(s-p_2)} + \frac{c_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{c_{1n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+ \frac{c_{k1}}{(s-p_k)} + \frac{c_{k2}}{(s-p_k)^2} + \cdots + \frac{c_{kn_k}}{(s-p_k)^{n_k}} \Leftrightarrow$$

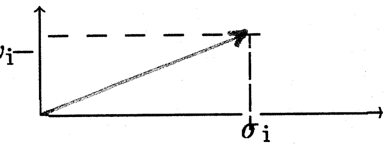
$$h(t) = c_{11}e^{p_1 t} + c_{12}\frac{t}{1!}e^{p_1 t} + \cdots + c_{1n_1}\frac{t^{(n_1-1)}}{(n_1-1)!}e^{p_1 t} +$$

$$+ c_{21}e^{p_2 t} + c_{22}\frac{t}{1!}e^{p_2 t} + \cdots + c_{2n_1}\frac{t^{(n_2-1)}}{(n_2-1)!}e^{p_2 t} +$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+ c_{k1}e^{p_k t} + c_{k2}\frac{t}{1!}e^{p_k t} + \cdots + c_{kn_k}\frac{t^{(n_k-1)}}{(n_k-1)!}e^{p_k t}$$

όπου οι σταθερές c_{ij} δίνονται από τον παρακάτω τύπο :

$$c_{ij} = \frac{1}{(n_i-j)!}\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]_{s=p_i}$$

Εστω $p_i=\sigma_i+j\omega_i$



Ξεχωρίζουμε τρείς περιπτώσεις :

1) $\sigma_i<0$: $\|t^{k-1}e^{p_i t}\| \longrightarrow 0 \quad k=0,1,\ldots$ (ασυμπτωτική ευστάθεια)

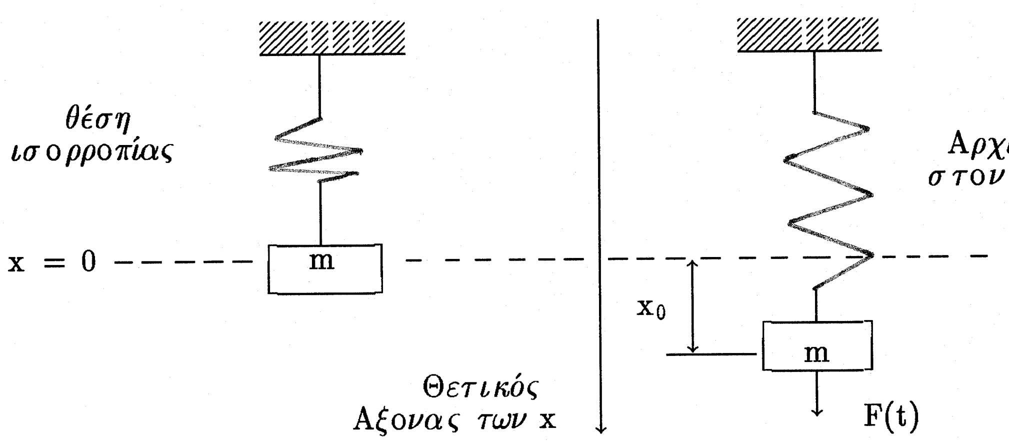
2) $\sigma_i>0$: $\|t^{k-1}e^{p_i t}\| \longrightarrow \infty \quad k=0,1,\ldots$ (αστάθεια)

3) $\sigma_i=0$: $\begin{cases} \alpha) \ \|t^{k-1}e^{p_i t}\| < 1 \quad k=1 & \text{(ευστάθεια σε κύκλο M)} \\ \beta) \ \|t^{k-1}e^{p_i t}\| \longrightarrow \infty \quad \kappa=2,3,\ldots & \text{(αστάθεια)} \end{cases}$

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω :

Θεώρημα Ενα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα Σ μ.ε.μ.ε. (m<n) είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν οι πόλοι του έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, ενώ είναι **ευσταθές σε κύκλο ακτίνος M** αν όλοι οι πόλοι του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ή είναι φανταστικοί αριθμοί πολλαπλότητας ένα. □

Παράδειγμα 34 Δίνεται το παρακάτω γραμμικό δυναμικό σύστημα



που διέπεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{k}{m}x(t)=\frac{F(t)}{m}$$

όπου a *και* k *αυστηρά θετικοί αριθμοί.* *Είναι το παρακάτω σύστημα ευσταθές ;*

Λύση

Η *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι*

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}F(t)}{\mathcal{L}X(t)} = \frac{1}{ms^2+as+k}$$

και οι πόλοι του συστήματος είναι :

$$s_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-4mk}}{2m} \qquad s_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2-4mk}}{2m}$$

Περίπτωση 1 $a^2-4mk>0$

Παρατηρώ *ότι* $\|a^2-4mk\|<a^2$ *και συνεπώς* s_1 *και* s_2 *είναι διαφορετικοί αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και συνεπώς το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Περίπτωση 2 $a^2-4mk=0$

Το *σύστημα μου έχει μια ρίζα* $s_1=-a/2m$ *πολλαπλότητας* 2 *και είναι πάλι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Περίπτωση 3 *α)* $a^2-4mk<0$ *και* $a\neq 0$

Το *σύστημα μου έχει δύο μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος*

$$s_1 = \frac{-a + i\sqrt{4mk-a^2}}{2m} \qquad s_2 = \frac{-a - i\sqrt{4mk-a^2}}{2m}$$

και συνεπώς το σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

β) $a^2-4mk<0$ *και* $a=0$

Το *σύστημα μου έχει δυο φανταστικές ρίζες πολλαπλότητας ένα.*

$$s_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad s_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+k} = \frac{1}{\sqrt{km}}\,\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \Rightarrow \|h(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{km}}$$

και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές στον κύκλο ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{km}}$. □

§11. Αρμονική απόκριση συστημάτων.

<u>**Ορισμός**</u> Η έξοδος ενός <u>*ασυμπτωτικά ευσταθούς*</u> *συστήματος στην μόνιμη κατάσταση υπό ημιτονοειδή διέγερση ονομάζεται* ***αρμονική απόκριση*** *του συστήματος.* □

Εστω ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μ.ε.μ.ε. το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)$$

όπου $m<n$. *Αν θεωρήσω ως είσοδο την ημιτονοειδή διέγερση*

$$x(t) = A \sin(wt) \quad (\textit{πλάτους } A \textit{ και γωνιακής συχνότητας } w)$$

και πάρω μετασχηματισμούς Laplace *έχω :*

$$a_n[s^n y(s) - s^{n-1} y(0-) - \cdots - y^{(n-1)}(0-)] + a_{n-1}[s^{n-1} y(s) - s^{n-2} y(0-) - \cdots - y^{(n-2)}(0-)] + \cdots + a_0 y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0) \frac{Aw}{s^2 + w^2} - d(s) \Leftrightarrow$$

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{Aw}{s^2 + w^2} + \frac{c(s)}{a(s)} - \frac{d(s)}{a(s)}$$

όπου

$$c(s) = [s^{n-1}\; s^{n-2} \cdots 1] \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0-) \\ y^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0-) \end{bmatrix}$$

και

$$d(s) = [s^{m-1}\; s^{m-2} \cdots 1] \begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται πιο αναλυτικά ως

$$y(s) = \frac{c_{11}}{(s-p_1)} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{c_{21}}{(s-p_2)} + \frac{c_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{c_{1n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{c_{k1}}{(s-p_k)} + \frac{c_{k2}}{(s-p_k)^2} + \cdots + \frac{c_{kn_k}}{(s-p_k)^{n_k}} + \frac{a}{s+jw} + \frac{\bar{a}}{s-jw} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = c_{11}e^{p_1 t} + c_{12}\frac{t}{1!}e^{p_1 t} + \cdots + c_{1n_1}\frac{t^{(n_1-1)}}{(n_1-1)!}e^{p_1 t} +$$

$$+ c_{21}e^{p_2 t} + c_{22}\frac{t}{1!}e^{p_2 t} + \cdots + c_{2n_1}\frac{t^{(n_2-1)}}{(n_2-1)!}e^{p_2 t} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ c_{k1}e^{p_k t} + c_{k2}\frac{t}{1!}e^{p_k t} + \cdots + c_{kn_k}\frac{t^{(n_k-1)}}{(n_k-1)!}e^{p_k t}$$

$$+ a\,e^{-jwt} + \bar{a}\,e^{jwt}$$

Το σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και συνεπώς τα πραγματικά μέρη των πόλων του συστήματος είναι αρνητικοί αριθμοί οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$y_{\mu o \nu}(t) = \left(\lim_{t \to \infty} y(t) \right) = a\,e^{-jwt} + \bar{a}\,e^{jwt}$$

όπου

$$a = \left[(s+jw)\left(\frac{b(s)}{a(s)}\frac{Aw}{s^2+w^2} + \frac{c(s)}{a(s)}\right)\right]_{s=-jw} =$$

$$= \left[H(s)\frac{Aw}{s-jw}\right]_{s=-jw} = H(-jw)\frac{A}{-2j}$$

και

$$\bar{a} = \left[(s-jw)\left(\frac{b(s)}{a(s)}\frac{Aw}{s^2+w^2} + \frac{c(s)}{a(s)}\right)\right]_{s=+jw} =$$

$$= \left[H(s)\frac{Aw}{s+jw}\right]_{s=+jw} = H(+jw)\frac{A}{+2j}$$

Αρα ή μόνιμη κατάσταση του συστηματος θα είναι :

$$y_{\mu o \nu}(t) = H(-jw) \frac{A}{-2j} e^{-jwt} + H(+jw) \frac{A}{+2j} e^{+jwt}$$

Εφόσον η $H(jw) \in \mathbb{C}$ *έστω*

$$H(jw) = Re[H(jw)] + j\,Im[H(jw)] = X(w) + jY(w)$$

Η $H(jw)$ *γράφεται αλλιώς ως*

$$H(jw) = |H(jw)|\, e^{j\theta(w)}$$

όπου

$$|H(jw)| = \sqrt{X(w)^2 + Y(w)^2}$$

και

$$\tan\theta(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

Επειδή η $H(s)$ *είναι ρητή συνάρτηση με πραγματικούς συντελεστές έχω ότι :*

$$|H(-jw)| = |H(jw)|$$

και συνεπώς

$$H(-jw) = |H(-jw)|\, e^{-j\theta(w)} = |H(jw)|\, e^{-j\theta(w)}$$

Βάσει των παραπάνω η αρμονική απόκριση του συστήματος θα είναι :

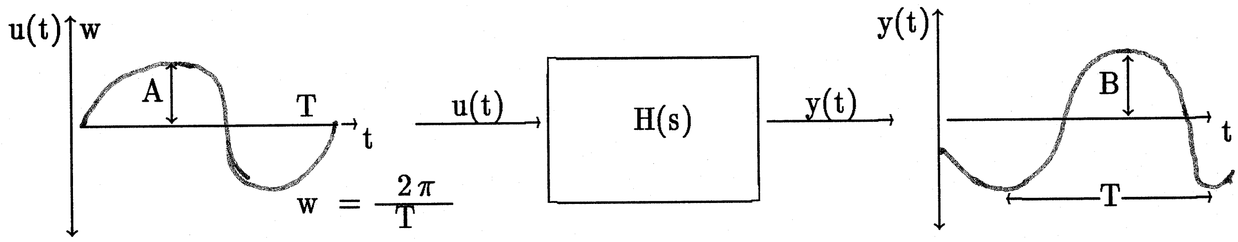
$$y_{\mu o \nu}(t) = H(-jw) \frac{A}{-2j} e^{-jwt} + H(+jw) \frac{A}{+2j} e^{+jwt} =$$

$$= -A\, |H(jw)| \frac{e^{-j\theta(w)}\, e^{-jwt}}{2j} + A\, |H(jw)| \frac{e^{j\theta(w)}\, e^{jwt}}{2j}$$

$$= A|H(jw)| \frac{e^{j(\theta(w)+wt)} - e^{-j(\theta(w)+wt)}}{2j} =$$

$$= A|H(jw)| \sin(wt+\theta(w)) = B \sin(wt+\theta(w))$$

<u>*Συμπέρασμα*</u> Το *πλάτος της εξόδου είναι το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιασμένο με* $|H(jw)|$ *ενώ η γωνιακή συχνότητα της εξόδου είναι η γωνιακή συχνότητα της εισόδου μετατοπισμένη κατά* $\theta(w)$. □



Αλγόριθμος εύρεσης αρμονικής απόκρισης.

Εστω ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μ.ε.μ.ε. το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)$$

Ας *θεωρήσουμε ως είσοδο την ημιτονοειδή διέγερση*

$$x(t) = A \sin(wt) \quad (\text{πλάτους A και γωνιακής συχνότητας } w)$$

<u>*Βήμα* 1</u> Εξετάζω *αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μου είναι αρνητικοί έτσι ώστε το σύστημα μου να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

<u>*Βήμα* 2</u> Υπολογίζω *την* $H(jw)$

$$H(jw) = Re[H(jw)] + j\, Im[H(jw)] = X + jY$$

<u>*Βήμα* 3</u> Βρίσκω *το μέτρο της* $H(jw)$

$$|H(jw)| = \sqrt{X(w)^2 + Y(w)^2}$$

<u>*Βήμα* 4</u> Βρίσκω *το όρισμα της* $H(jw)$

$$\tan\theta(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

<u>*Βήμα* 5</u> Η *αρμονική απόκριση του συστήματος θα είναι*

$$y(t) = A|H(jw)| \sin(wt+\theta(w))$$ □

Παράδειγμα 35 *Να βρεθεί η αρμονική απόκριση του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t)$$

όπου $u(t) = \sin(2t)$ (*συνεπώς* A=1 *και* w=2).

Λύση

<u>*Βήμα* 1</u> *Παρατηρώ ότι οι πόλοι του συστήματος μου είναι* $s_1 = -2$ *και* $s_2 = -3$ *και επειδή είναι αρνητικοί το σύτημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές*, *οπότε μπορούμε να μιλάμε για αρμονική απόκριση του συστήματος.*

<u>*Βήμα* 2</u> *Υπολογίζω την* H(jw)

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+5s+6} \Longrightarrow H(j2) = \frac{j2-1}{(j2)^2+5j2+6} = \frac{j2-1}{(6-2^2)+j\,(5\;2)} =$$

$$= \frac{-1+2j}{2+10j} = \frac{(-1+2j)(2-10j)}{2^2+10^2} = \frac{18+j\,14}{104} = \frac{18}{104} + j\frac{14}{104}$$

<u>*Βήμα* 3</u> *Υπολογίζω το μέτρο της* H(jw)

$$|H(j2)| = \sqrt{\left[\frac{18}{104}\right]^2 + \left[\frac{14}{104}\right]^2} = 0.048$$

<u>*Βήμα* 4</u> *Υπολογίζω το όρισμα της* H(jw)

$$\tan\theta = \frac{\frac{14}{104}}{\frac{18}{104}} = \frac{14}{18} = 0.777 \Longrightarrow \theta = +42.08^0$$

<u>*Βήμα* 5</u> *Η αρμονική απόκριση του συστήματος θα είναι :*

$$y(t) = 1\;0.048\,\sin(2t+42.08^0) = 0.048\,\sin(2t+42.08^0)$$ □

Παράδειγμα 36 *Ποια η αρμονική απόκριση του συστήματος του παραδείγματος 35 αν θεωρήσω ως είσοδο την* $u(t) = 5\sin(2t) + 6\sin(3t)$.

Λύση

Το σύστημα μου είναι γραμμικό και συνεπώς αν

α) για είσοδο $u_1(t) = \sin(2t)$ *έχω* *έξοδο* $y_1(t)$

β) για είσοδο $u_2(t) = \sin(3t)$ *έχω* *έξοδο* $y_2(t)$

τότε

για είσοδο $u(t) = 5\sin(2t) + 6\sin(3t)$ *θα έχω* *έξοδο* $5y_1(t)+6y_2(t)$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε την έξοδο για $u_2(t) = \sin(3t)$.

<u>*Βήμα* 1</u> Το *πρώτο βήμα είναι το ίδιο με του παραδείγματος* 35.

<u>*Βήμα* 2</u> Υ*πολογίζω την* H(jw)

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+5s+6} \Longrightarrow H(j3) = \frac{j3-1}{(j3)^2+5j3+6} = \frac{j3-1}{(6-3^2)+j\,(5\;3)} =$$

$$= \frac{-1+3j}{-3+15j} = \frac{(-1+3j)\,(-3-15j)}{(-3)^2+15^2} = \frac{48\;+j\;6}{234} = \frac{48}{234} + j\frac{6}{234}$$

<u>*Βήμα* 3</u> Υ*πολογίζω το μέτρο της* H(jw)

$$|H(j3)| = \sqrt{[\frac{48}{234}]^2 + [\frac{6}{234}]^2} = 0.0427$$

<u>*Βήμα* 4</u> Υ*πολογίζω το όρισμα της* H(jw)

$$\tan\theta = \frac{\frac{6}{234}}{\frac{48}{234}} = \frac{6}{48} = 0.125 \Longrightarrow \theta = +7.916^0$$

<u>*Βήμα* 5</u> Η *αρμονική απόκριση του συστήματος θα είναι* :

$$y(t) = 1\;0.0427\,\sin(3t+7.916^0) = 0.0427\,\sin(3t+7.916^0)$$

Αρα για είσοδο $u_1(t) = \sin(2t)$ *έχω έξοδο* $y_1(t) = 0.048\,\sin(2t+42.08^0)$

και για είσοδο $u_2(t) = \sin(3t)$ *έχω έξοδο* $y_2(t) = 0.0427\,\sin(3t+7.916^0)$

και συνεπώς για είσοδο

$$u(t) = 5\sin(2t) + 6\sin(3t)$$

θα έχω έξοδο

$$y(t) = 5y_1(t) + 6y_2(t) =$$

$$= 5[0.048\,\sin(2t+42.08^0)] + 6[0.0427\,\sin(3t+7.916^0)] =$$

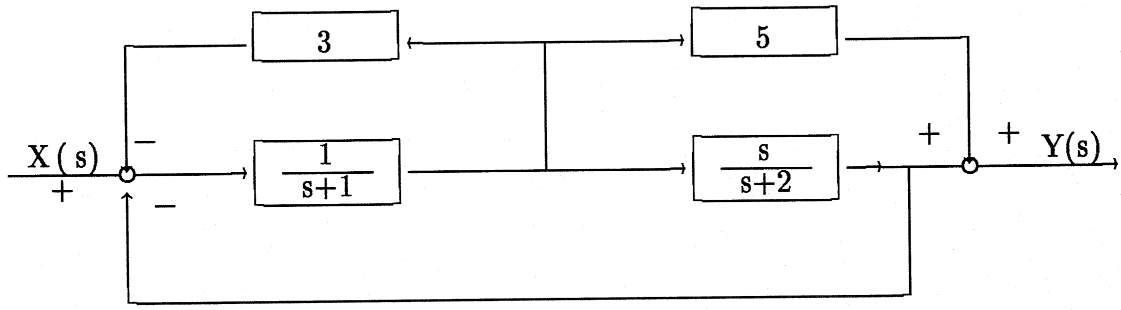
$$= 0.24\sin(2t+42.08^0) + 0.2562\sin(3t+7.916^0)$$

□

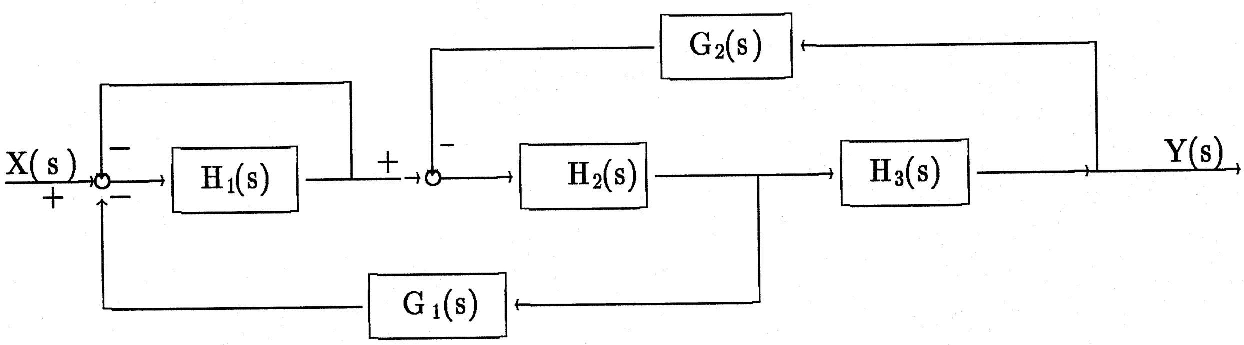
Ασκήσεις §8,§9,§10,§11.

Ασκηση 1 Να *βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των παρακάτω συστημάτων* :

α)



β



Ασκηση 2 Να *βρεθούν* i)*οι πόλοι* , ii) *η κρουστική απόκριση και* iii) *η ευστάθεια των συστημάτων με τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς* :

$\alpha)\ H(s) = \dfrac{s - 4}{s^2 + 7s}$

$\beta)\ H(s) = \dfrac{s + 3}{s^2 + 3}$

$\gamma)\ H(s) = \dfrac{3s^3 - 2s + 6}{s^3 + s^2 + s + 1}$

Ασκηση 3 Να *βρεθεί η αρμονική απόκριση των παρακάτω συστημάτων*

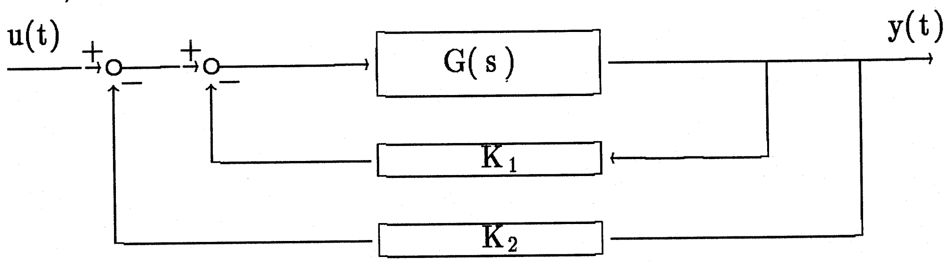
$\alpha)\ (\Sigma) : \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 3\,y(t) = \dfrac{du(t)}{dt} - u(t)$

με u(t)=3sin(2t)+2sin(t).

$\beta)\ (\Sigma) : \dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 1\,y(t) = \dfrac{du(t)}{dt} + u(t)$

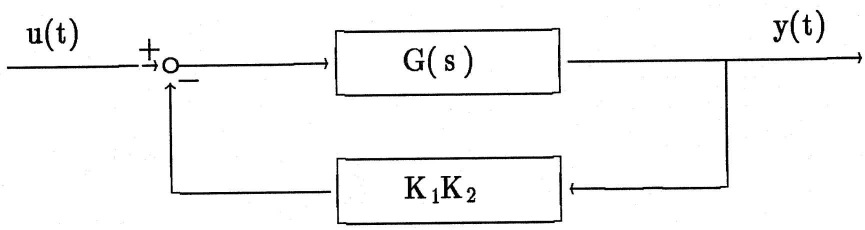
με u(t)=2sin(4t).

Ασκηση 4 Εχουν τα 2 παρακάτω κλειστά συστήματα την ίδια συνάρτηση μεταφοράς ,ναι ή όχι και γιατί ;



σχήμα 1

και



σχήμα 2

όπου K_1 και K_2 είναι πραγματικοί αριθμοί.

§12. Κριτήριο Routh.

Μια <u>αναγκαία</u> συνθήκη για την ύπαρξη ριζών στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο ενός πολυωνύμου

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

είναι $a_i > 0$. Επομένως μια <u>αναγκαία</u> συνθήκη για να είναι ένα σύστημα

$$\begin{aligned}(\Sigma):\ a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) &= \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, x(t)\end{aligned}$$

<u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u> είναι $a_i > 0$.

Παράδειγμα 37 Βάσει του παραπάνω κριτηρίου, το σύστημα

$$(\Sigma):\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 5\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t)$$

είναι ασταθές γιατί $\alpha_2 = -5 < 0$. □

Σκοπός της παραπάνω συνθήκης είναι να μας διευκολύνει στην ανεύρεση της αστάθειας ορισμένων συστημάτων.

Εστω το πολυώνυμο

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Σχηματίζω τον παρακάτω πίνακα βάσει των συντελεστών του πολυωνύμου a(s).

<u>Πίνακας Routh</u>

$$\begin{array}{l|lll} s^n & a_n & a_{n-2} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \\ s^0 & d_0 & & \end{array}$$

όπου

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-4}\end{bmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5}\end{bmatrix}$$

<u>**Θεώρημα**</u> (Routh) <u>*Ικανή*</u> *και* <u>*αναγκαία*</u> *συνθήκη τέτοια ώστε όλες οι ρίζες* p_i *του πολυωνύμου* $a(s)$ *να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος* ($Re(p_i)<0$) *είναι* :

i) $a_i>0$

ii) *τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα* Routh *είναι αυστηρώς θετικά.* □

Σημείωση Το *πλήθος της εναλλαγής προσήμων στην πρώτη στήλη του του πίνακα* Routh *είναι ίσο τον αριθμό των μηδενικών* (p_i) *του* $a(s)$ *που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.*

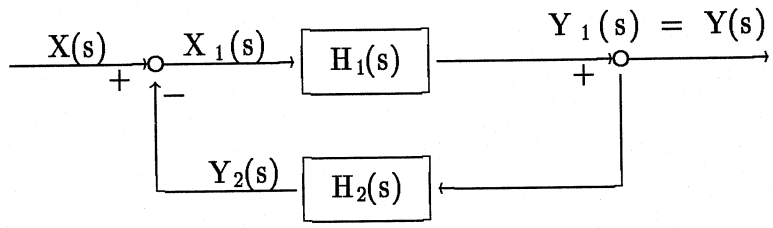
Θα *εξετάσουμε παρακάτω τρείς διαφορετικές περιπτώσεις που μπορούμε να συναντήσουμε κατά την εφαρμογή του κριτηρίου* Routh.

Περίπτωση 1 Κα*νένα μηδενικό στην πρώτη στήλη.*

Σ' *αυτήν την περίπτωση, απλά εφαρμόζω το κριτήριο, χωρίς κανένα τέχνασμα.*

Παράδειγμα 38 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα* :

(Σ) :



όπου $H_1(s) = \dfrac{1}{s^3+s^2+s+5}$ *και* $H_2(s) = 5$. *Είναι το παραπάνω σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές ναι ή όχι και γιατί;*

Λύση

$$\left.\begin{aligned} Y(s) = \ Y_1(s) &= H_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) \ &= \ X(s) - H_2(s)Y(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 \ + \ H_1(s)H_2(s)}X(s)$$

και συνεπώς

$$H(s) = \frac{1}{s^3+s^2+s+10}$$

Εφαρμόζω *το κριτήριο* Routh *για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο*

$$a(s) = s^3+s^2+s+10$$

Εχω ότι $a_i>0$. Ακολούθως σχηματίζω τον

<u>Πίνακας Routh</u>

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & -9 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 \end{array}$$

Παρατηρώ ότι παρ'όλο που έχω $a_i>0$, η πρώτη στήλη έχει ένα στοιχείο αρνητικό και συνεπώς έχω ρίζες στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο. Το πλήθος των ριζών που βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο είναι ίσο με το πλήθος της εναλλαγής προσήμων στην πρώτη στήλη δηλαδή δύο. ($1 \longrightarrow -9 \longrightarrow 10$). Το σύστημα είναι ασταθές. □

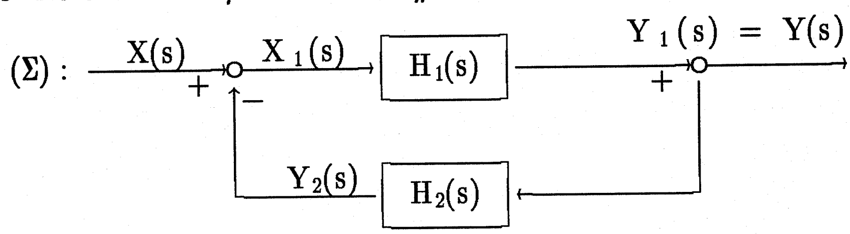
Περίπτωση 2 Εχω ένα μηδενικό στην πρώτη στήλη.

α) Σ'αυτήν την περίπτωση πολλαπλασιάζω το πολυώνυμο a(s) με τον παράγοντα (s+a) όπου a>0 και –a δεν είναι ρίζα του a(s).

ή

β) Αντικαθιστώ το 0 με έναν θετικό αριθμό ε και συνεχίζω έτσι ώστε να συμπληρώσω τον πίνακα και ακολούθως αφήνω το ε να τείνει στο μηδέν και ελέγχω τα πρόσημα των στοιχείων της πρώτης στήλης.

Παράδειγμα 39 Δίνεται το παρακάτω σύστημα :



όπου $H_1(s) = \dfrac{4s^2+11s+9}{s^5+2s^4+2s^3+2s+1}$ και $H_2(s) = 1$. Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια το παραπάνω σύστημα Σ.

Λύση

Κατά τον ίδιο τρόπο με το παράδειγμα 38 βρίσκω την συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος.

$$H(s) = \frac{4s^2+11s+9}{s^5+2s^4+2s^3+4s^2+13s+10}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι* :

$$a(s) = s^5+2s^4+2s^3+4s^2+13s+10$$

Παρατηρώ *ότι* $a_i>0$. Ακολούθως *σχηματίζω τον*

<u>*Πίνακας* Routh</u>

s^5	1	2	13
s^4	2	4	10
s^3	0	8	0
s^2			
s			
s^0			

Παρατηρώ *ότι* $a(-2)=-16\neq0$ *και συνεπώς παίρνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο* :

$$a'(s) = (s+2)(s^5+2s^4+2s^3+4s^2+13s+10) = s^6+4s^5+6s^4+8s^3+21s^2+36s+20$$

<u>*Πίνακας* Routh</u>

s^6	1	6	21	20
s^5	4	8	36	0
s^4	4	7	20	0
s^3	1	16	0	0
s^2	–57	20	0	0
s	16.35	0	0	0
s^0	20	0	0	0

Παρατηρώ *ότι έχω δυο εναλλαγές προσήμου* $(1 \longrightarrow -57 \longrightarrow 16.35)$ *και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο* a(s) *ή ισοδύναμα το* a′(s) *έχει δυο πόλους στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο*, οπότε *το σύστημα μου είναι ασταθές*. □

Περίπτωση 3 Μια *γραμμή μηδενική στον πίνακα* Routh.

Εστω *ότι*

<u>*Πίνακας* Routh</u>

s^n	a_n	a_{n-2}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^m	b_{m-1}	b_{m-3}	$\cdots$
s^{m-1}	0	0	$\cdots$
.	.	.	$\cdots$
s^0	d_0		

<u>*Βήμα* 1</u> *Σχηματίζω το πολυώνυμο*

$$q(s) = b_{m-1}s^{m} + b_{m-3}s^{m-2} + b_{m-5}s^{m-4} + \cdots$$

<u>*Βήμα* 2</u> *Παραγωγίζω το* q(s)

$$q(s) = mb_{m-1}s^{m-1} + (m-2)b_{m-3}s^{m-3} + (m-4)b_{m-5}s^{m-5} + \cdots$$

<u>*Βήμα* 3</u> *Απο τους συντελεστές του* q′(s) *δημιουργώ την* (m–1)*–γραμμή.*

$$s^{m-1} \mid mb_{m-1} \quad (m-2)b_{m-3} \quad (m-4)b_{m-5} \cdots$$

Παράδειγμα 40 *Δεδομένου ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος είναι*

$$a(s) = s^5+s^4+4s^3+24s^2+3s+63$$

να εξεταστεί αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση *Παρατηρώ ότι* $a_i>0$. *Ακολούθως σχηματίζω τον πίνακα* Routh

<u>*Πίνακας* Routh</u>

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	–20	–60	0
s^2	21	63	0
s	0	0	0
s^0			

άρα

<u>*Βήμα* 1</u> *Παίρνω το πολυώνυμο*

$$q(s) = 21s^2+63$$

<u>*Βήμα* 2</u> *Παραγωγίζω το* q(s)

$$q'(s) = 42s$$

<u>*Βήμα* 3</u> *Απο τους συντελεστές του* q′(s) *δημιουργώ την πέμπτη γραμμή.*

$$s^{m-1} \mid 42 \quad 0$$

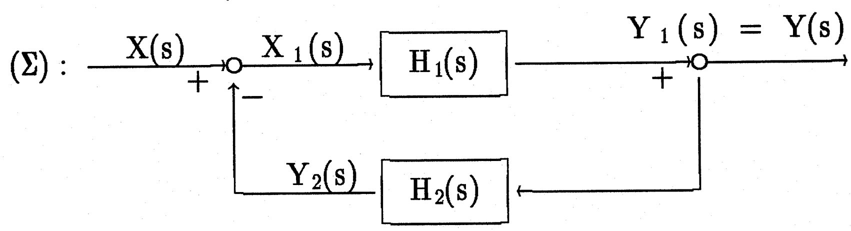
και άρα τελικά παίρνω τον

<u>Πίνακας Routh</u>

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 4 & 3 \\
s^4 & 1 & 24 & 63 \\
s^3 & -20 & -60 & 0 \\
s^2 & 21 & 63 & 0 \\
s & 42 & 0 & 0 \\
s^0 & 63 & &
\end{array}
$$

και άρα το σύστημα μου είναι ασταθές με δυο πόλους στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο , όσες είναι και οι εναλλαγές των προσήμων στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh. □

Παράδειγμα 41 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα :*



όπου $H_1(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)\,(s-2)}$ *και* $H_2(s) = K$. *Να εξεταστεί για ποιές τιμές του* K *το παραπάνω σύστημα* (Σ) *είναι ευσταθές.*

Λύση

Η *συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι*

$$
H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{s+1}{s^2+(k-3)s+k+2}
$$

Μ*ια αναγκαία συνθήκη για να έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* (Σ) *ρίζες στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο είναι*

$$
\left.\begin{array}{l} k-3>0 \\ k+2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k>3 \\ k>-2 \end{array}
$$

Η *παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία και ικανή όταν επιπλέον η πρώτη στήλη του πίνακα* Routh *έχει μόνο θετικά στοιχεία,*

<u>Πίνακας Routh</u>

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & k+2 \\
s^1 & k-3 & 0 \\
s^0 & k+2 & 0
\end{array}
$$

δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} k-3>0 \\ k+2>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} k>3 \\ k>-2 \end{array}$$

οπότε το σύστημα (Σ) *είναι ευσταθές για* k>3. *Για την τιμή* k=3 *έχω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο*

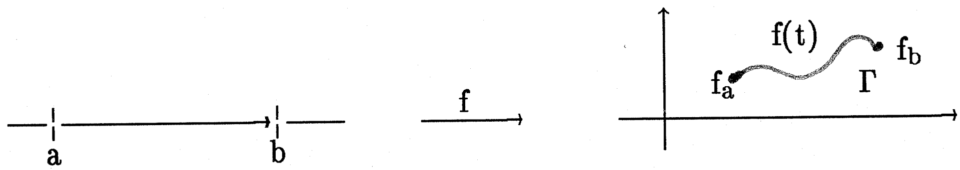
$$a(s) = s^2+5$$

οπότε το σύστημα μου είναι ευσταθές σε κύκλο M *επειδή έχει δυο πόλους πολλαπλότητας ένα στον φανταστικό άξονα.* □

§13. *Θέματα μιγαδικών συναρτήσεων.*

<u>Καμπύλη Γ</u> : Καμπύλη Γ *μια συνάρτησης* f : [a,b] ⟶ ℂ *καλείται η γραφική παράσταση της*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$



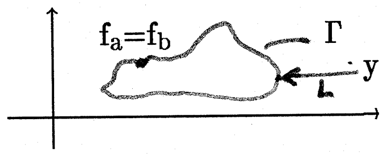
ή ισοδύναμα ο δρόμος που διαγράφει το σημείο f(t) *όταν το* t ∈ [a,b]. □

<u>Κλειστή Καμπύλη</u> Κλειστή *καμπύλη* Γ *μιας συνάρτησης* f : [a,b] ⟶ ℂ *λέγεται αυτή για την* οποία *ισχύει* :

$$\forall\, t_1,t_2 \in [a,b],\ (t_1<t_2 \ \textit{και}\ f(t_1)=f(t_2)) \Longrightarrow (t_1=a \ \textit{και}\ t_2=b)$$ □

<u>*Αριθμός περιστροφών κλειστής καμπύλης* Γ *περί σημείο* y∈ℂ.</u>

Εστω *κλειστή καμπύλη* Γ ∈ ℂ *και σημείο* y ∈ ℂ, y∉Γ.



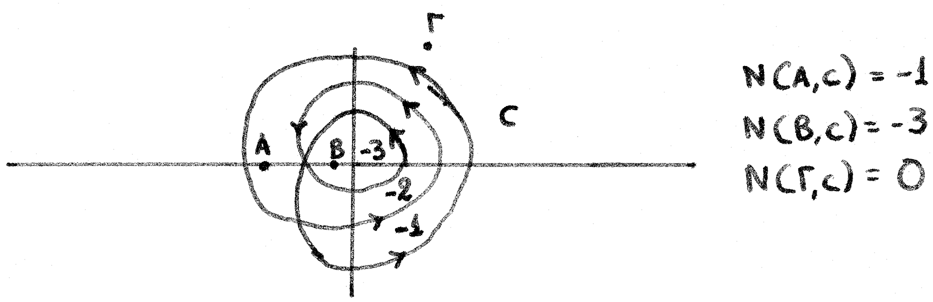
Ο *αριθμός των πλήρων περιστροφών της ακτίνας* L *περί το* y *όταν το άκρο της* L *κινείται πάνω στην* Γ *ονομάζεται αριθμός περιστροφών της* Γ *περί το* y *και συμβολίζεται* N(y,Γ). □

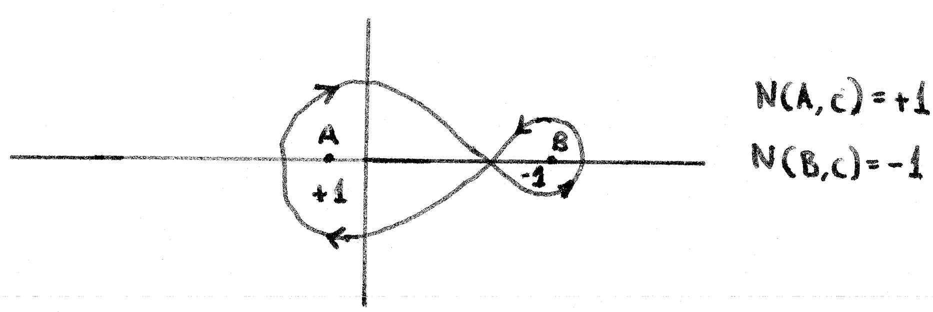
Σύμβαση :

i) N(y,Γ)>0 *όταν το άκρο της* L *κινείται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.*

ii) N(y,Γ)<0 *όταν το άκρο της* L *κινείται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.*

Παράδειγμα 42

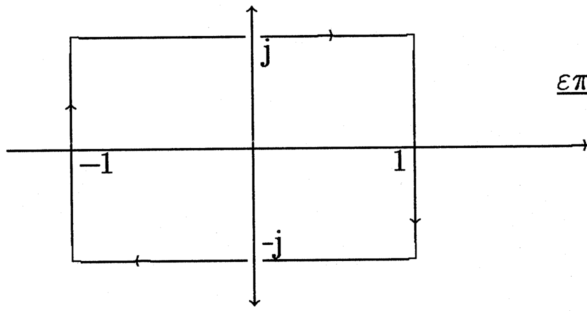




Μπορούμε να θεωρήσουμε επίσης <u>*απεικονίσεις* Γ</u> *κλειστών καμπύλων* C *του μιγαδικού επιπέδου* $\mathbb{C}$ *μέσω κανονικών ρητών συναρτήσεων*

$$F(s) = \frac{h(s)}{d(s)} \quad \text{όπου} \quad \deg(h(s)) < \deg(d(s))$$

Παράδειγμα 43 *Να βρεθεί η απεικόνιση της κλειστής καμπύλης :*



<u>*επίπεδο–s*</u>

μέσω της ρητής συναρτήσεως $F(s) = \dfrac{s}{s+2}$.

Λύση

Θέτω τις τιμές της F(s) *για*

i) $s = -1 + jw$ *για* $w \in [-1, 1]$

$$F(-1 + jw) = \frac{-1 + jw}{1 + jw} = \frac{(-1+w^2) + j(2w)}{1 + w^2} = \frac{(-1+w^2)}{1+w^2} + j\frac{2w}{1+w^2}$$

ii) $s = 1 + jw$ *για* $w \in [-1, 1]$

$$F(1 + jw) = \frac{1 + jw}{3 + jw} = 1 + j\frac{2w}{3+w^2}$$

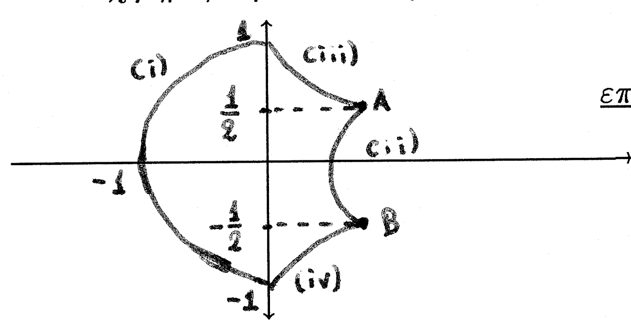
iii) $s = w + j$ *για* $w \in [-1, 1]$

$$F(w + j) = \frac{w + j}{(w+2) + j} = \frac{w^2+2w+1}{(w+2)^2+1^2} + j\frac{2}{(w+2)^2+1^2}$$

(iv) $s = w - j$ *για* $w \in [-1, 1]$

$$F(w - j) = \frac{w - j}{(w+2) - j} = \frac{w^2+2w+1}{(w+2)^2+1^2} - j\frac{2}{(w+2)^2+w^2}$$

και παίρνω την αντίστοιχη γραφική απεικόνιση του παραπάνω κλειστού δρόμου που είναι



<u>*επίπεδο–F(s)*</u>

□

<u>*Θεώρημα*</u> *Εστω* C *κλειστή καμπύλη στο επίπεδο* $\mathbb{C}$. *Εστω* f(s) *συνάρτηση η οποία είναι αναλυτική πάνω και μέσα στην* C (*εκτος από έναν πεπερασμένο αριθμό πόλων εντός της* C). *Εστω* Γ *η κλειστή καμπύλη του επιπέδου* f(s) (*πρβ.*43), *η οποία αποτελεί απεικόνιση της* C *μέσω της* f(s). *Τότε ο αριθμός* $N=N_\Gamma(0)$ *περιστροφών της* Γ *περί το σημείο* (0,0) *του επιπέδου* f(s) *είναι* :

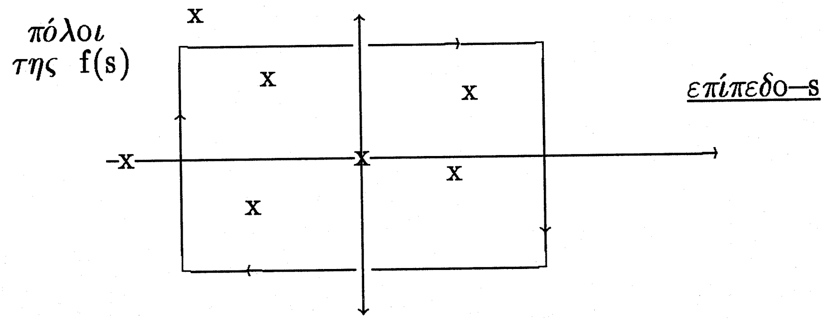
$$N = Z - P$$

όπου

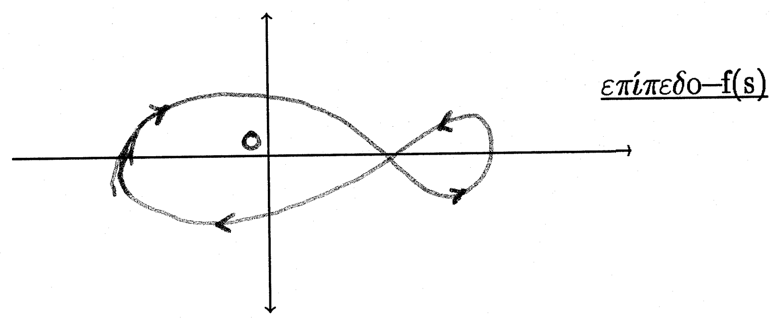
Z : *αριθμός των μηδενικών της* f(s) *μέσα στην* C.

P : *αριθμός των πόλων της* f(s) *μέσα στην* C.

Παράδειγμα 44 *Εστω* C *η παρακάτω κλειστή καμπύλη στο* $\mathbb{C}$:



και Γ *η παρακάτω κλειστή καμπύλη του επιπέδου* f(s) *η οποία αποτελεί απεικόνιση της* C *μέσω της* f(s)



Να *προσδιορισθει ο αριθμός των μηδενικών της* f(s).

Λύση

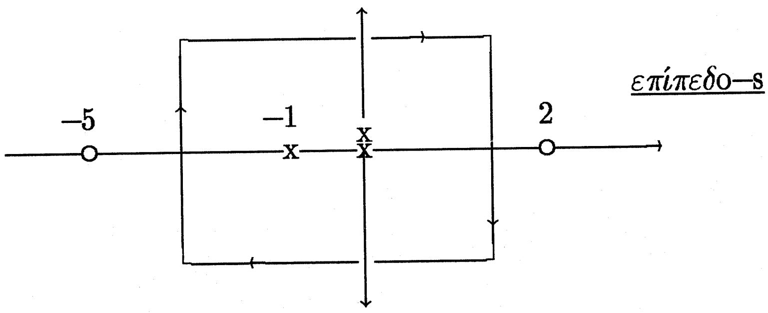
Ο *αριθμός των πόλων της* f(s) *μέσα στο επίπεδο*–s *είναι* P=5 *και ο αριθμός περιστροφών της* Γ *περί το σημείο* (0,0) *του επιπέδου* f(s) *είναι* $N=N_\Gamma(0)=1$ *και άρα*

$$N = Z-P \Longrightarrow Z = N+P = 5+1 = 6 \qquad \square$$

Παράδειγμα 45 Να *προσδιορισθεί το* $N_\Gamma(0)$ *για την συνάρτηση*

$$f(s) = \frac{k(s+5)\,(s-2)}{s^2\,(s+1)}$$

όταν η C *είναι* :

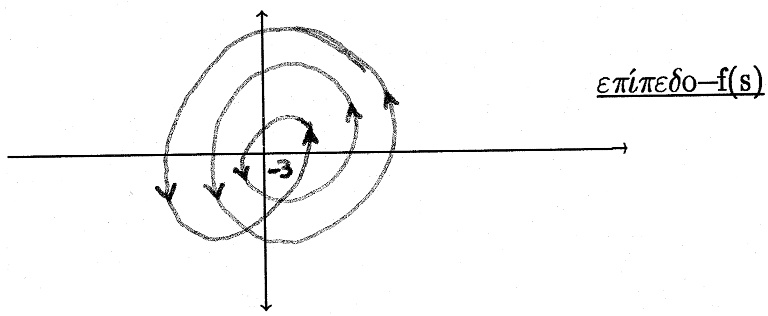


Λύση

Ο *αριθμός των μηδενικών της* f(s) *που βρίσκονται στο επίπεδο–*s *είναι* Z=0 *και των πόλων* P=3 *και άρα*

$$N = Z–P = 0–3 = –3$$

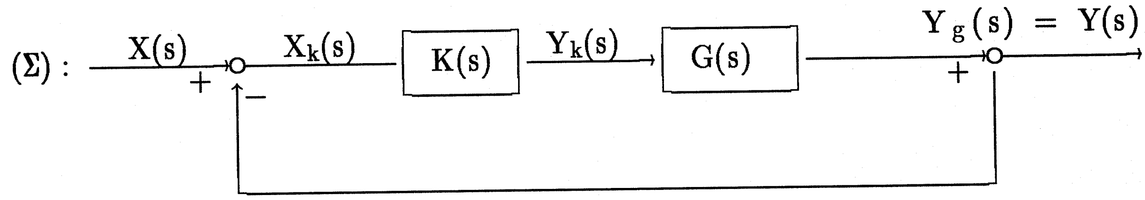
Συνεπώς η κλειστή καμπύλη του επιπέδου f(s) *θα έχει την παρακάτω μορφή* :



□

§14. Κριτήριο Nyquist.

Εστω το κλειστό σύστημα :



Εστω $G(s) = \dfrac{h(s)}{d(s)}$ και $K(s) = \dfrac{h_k(s)}{d_k(s)}$. Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω κλειστού συστήματος θα είναι :

$$H(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K(s)G(s)}{W(s)}$$

όπου

$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$

και p(s) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ανοικτού συστήματος και $p_c(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος συνεπώς είναι :

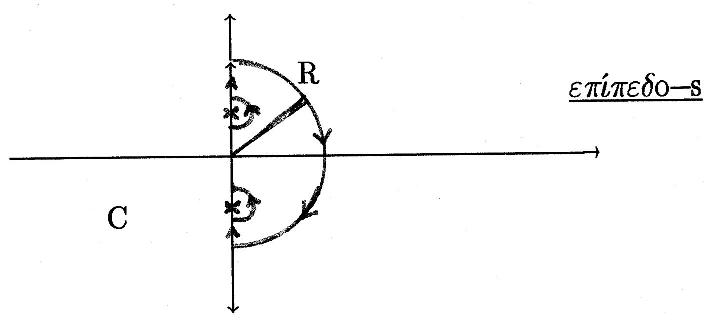
$$H(s) = \frac{h(s)\ h_k(s)}{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}$$

Το κλειστό σύστημα (Σ) είναι <u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u> εαν και μόνο εαν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p_c(s)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο. Εαν μελετάμε λοιπόν την ευστάθεια του κλειστού συστήματος θα πρέπει να μελετήσουμε με το κριτήριο Routh το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_c(s)$. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα κριτήριο ευστάθειας που στηρίζεται στην γραφική παράσταση της συναρτήσεως μεταφοράς του ανοικτού συστήματος.

Εστω η ρητή συνάρτηση

$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$

και η κλειστή καμπύλη C του σχήματος



Ο *αριθμός περιστροφών* $N_{\Gamma}(0)$ *της* Γ *περί το σημείο* (0,0) *του επιπέδου*–W(s) *είναι* :

$$N = Z - P$$

όπου

i) Z : *αριθμός των μηδενικών της* W(s) *μέσα στην* C.

ii) P : *αριθμός των πόλων της* W(s) *μέσα στην* C.

Οταν το $R \longrightarrow \infty$ *τότε*

εσωτερικό της C ≡ *Δεξιό μιγαδικο επίπεδο*

και τότε

i) Z : *αριθμός των μηδενικών της* W(s) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.*

ii) P : *αριθμός των πόλων της* W(s) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.*

ή ισοδύναμα

i) Z :*αριθμός των πόλων του κλειστού συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.* (*αριθμός των μηδενικών του* $p_c(s)$)

ii) P : *αριθμός των πόλων του ανοιχτού συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.* (*αριθμός των μηδενικών του* p(s))

Ι*κανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το κλειστό σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές είναι να μην έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς*

$$Z = 0$$

Α*ρα θα πρέπει*

$$N = -P$$

Πόρισμα (Κριτήριο Nyquist)

Το *κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η απεικόνιση* Γ *της* C *μέσω της* W(s) = 1+K(s)G(s) *περιστρέφεται περί το σημείο* (0,0) *του επιπέδου*–W(s)

$$N = -P$$

φορές, όπου P *ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος* (*της* G(s)K(s)) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.* □

Παρατηρούμε ότι αν Γ' *είναι η απεικόνιση της* C *κάτω από την* 1+G(s)K(s) *και η* Γ' *περιστρέφεται περί το* (0,0) *του επιπέδου*–1+G(s)K(s) N *φορές και αν* Γ *είναι η απεικόνιση της* C *κάτω από την* G(s)K(s) <u>*τότε*</u> *η* Γ *περιστρέφεται περί το* (–1,0) *του επιπέδου*–G(s)K(s) *επίσης* N *φορές και άρα μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω*

Γενικό Θεώρημα Nyquist

Το *κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η απεικόνιση* Γ *της* C *μέσω της* K(s)G(s) *περιστρέφεται περί το σημείο* (–1,0) *του επιπέδου*–K(s)G(s)

$$N = -P$$

φορές, όπου P *ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος* (*της* G(s)K(s)) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.* □

Στην περίπτωση που K(s) = K (*σταθερά*) *τότε το κριτήριο* Nyquist *μπορεί να διατυπωθεί ώς εξής* :

Κριτήριο Nyquist

Το *κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η απεικόνιση* Γ *της* C *μέσω της* G(s) *περιστρέφεται περί το σημείο* $(-\frac{1}{K}, 0)$ *του επιπέδου*–G(s)

$$N = -P$$

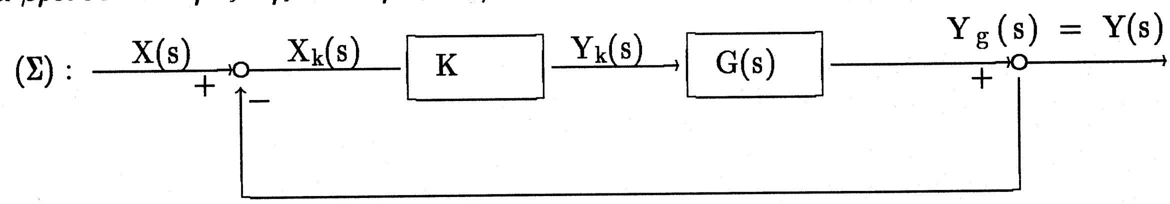
φορές, όπου P *ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος* (*της* K G(s)) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.* □

Διευκρίνιση : Ο *όρος* <u>*δεξιό μιγαδικό επίπεδο*</u> *δεν συμπεριλαμβάνει τον άξονα των φανταστικών αριθμών.*

Παράδειγμα 46 *Εστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς*

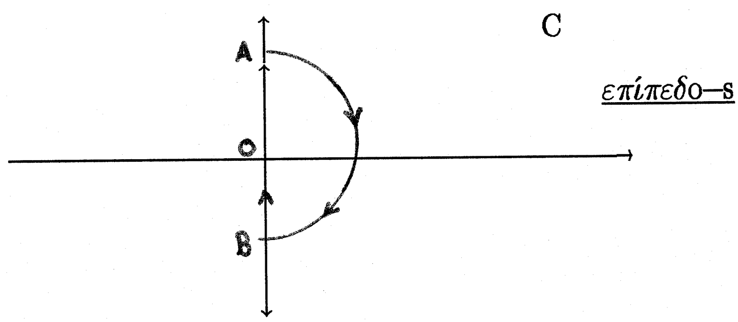
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς K *για τις οποίες το κλειστό σύστημα*



είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση *Εστω το επίπεδο–s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο*



<u>*Βήμα* 1</u> *Προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της* G(s)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \Longrightarrow$$

$$G(jw) = \frac{1}{(jw)^3+6(jw)^2+11(jw)+6} = \frac{1}{6(1-w^2)\ +\ j\ (11w-w^3)} =$$

$$= \frac{6(1-w^2)\ -\ j\ (11w-w^3)}{36(1-w^2)^2\ +\ (11w-w^3)^2} =$$

$$= \frac{6(1-w^2)}{36(1-w^2)^2\ +\ (11w-w^3)^2} - j\,\frac{(11w-w^3)}{36(1-w^2)^2\ +\ (11w-w^3)^2}$$

Συνήθως διαλέγουμε χαρακτηριστικές τιμές του w, *όπως για παράδειγμα τις τιμές* G(jw) *όπου* $w\in[-\infty,\infty]$ ($w=-\infty,+\infty,0$, *τις τιμές για τις οποίες η* G(jw) *βρίσκεται στο πραγματικό άξονα ή στον φανταστικό άξονα*), *τις τιμές* G(s) *για* $s=(\rho+jw)e^{j\theta}$ *του* $\rho\rightarrow0$ *όπου* jw *ένας πόλος της* G(s) *στον φανταστικό άξονα και* $\theta\in[-90^0,90^0]$, *καθώς και τις τιμές* G(s) *για* $s=Re^{j\theta}$ *του* $\rho\rightarrow\infty$ *όπου* $\theta\in[90^0,-90^0]$. *Παρατηρώ επίσης ότι* $\|G(jw)\| = \|G(-jw)\|$ *και* $\theta(-jw)=-\theta(jw)$.

Τιμές της G(s) για s πάνω στον φανταστικό άξονα της C

<u>Αρχική τιμή</u>

$w=0 \qquad G(j0) = \frac{1}{6}$

<u>$Re(G(jw)) = 0$</u> $\Longrightarrow 1-w^2 = 0 \Longrightarrow w = \pm 1$

$w=1 \qquad G(j1) = -j\frac{1}{10}$

$ww=-1 \qquad G(j(-1)) = +j\frac{1}{10}$

<u>$Im(G(jw)) = 0$</u> $\Longrightarrow w(11-w^2) = 0 \Longrightarrow w \in \{0, \sqrt{11}, -\sqrt{11}\}$

$w=\sqrt{11} \qquad G(j(\sqrt{11})) = -\frac{1}{60}$

$w=-\sqrt{11} \qquad G(j(-\sqrt{11})) = \frac{1}{60}$

<u>Τελική τιμή</u>

$w \longrightarrow +\infty \qquad \lim_{w \to +\infty} G(jw) = 0$

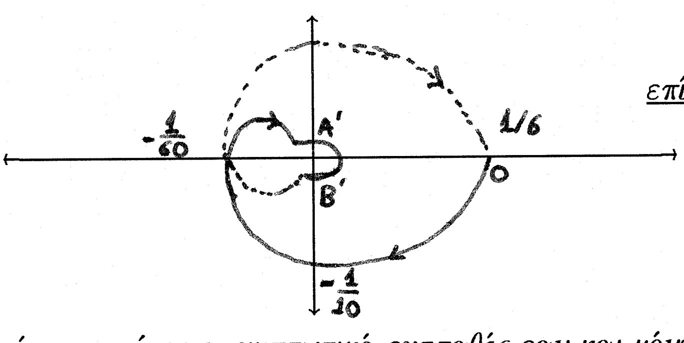
$w \longrightarrow -\infty \qquad \lim_{w \to -\infty} G(jw) = 0$

Τιμές της G(s) για s στο υπόλοιπο τμήμα της C

$s=Re^{j\theta}$ *όπου* $R \longrightarrow \infty \quad G(Re^{j\theta}) = \frac{1}{(Re^{j\theta}+1)(Re^{j\theta}+2)(Re^{j\theta}+3)} \simeq \frac{1}{R^3} e^{j(-3\theta)}$

$\theta \in [90^0, -90^0] \Longrightarrow -3\theta \in [-270^0, 270^0]$ *και* $\|G(Re^{j\theta})\| \longrightarrow 0$

Αρα προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της G(s) *έστω, όταν το* s *διαγράφει την καμπύλη* C *είναι* :



<u>*επίπεδο–G(s)*</u>

Το *κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η* Γ *περιστρέφει περί το σημείο* $(-\frac{1}{k}, 0)$

$N = -P$ *φορές*

όπου

$$P := \text{πόλοι της } G(s) \text{ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο}$$

Η G(s) *έχει όλους τους πόλους της* $\{-1,-2,-3\}$ *στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο και άρα* P=0 *ή ισοδύναμα* N=0. *Αρα σύμφωνα με το κριτήριο του* Nyquist *το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η καμπύλη* Γ *περιστρέφεται περί το σημείο* $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$ N=0 *φορές ή ισοδύναμα εαν και μόνο εαν*

$$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{60} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{k} > \frac{1}{6} \Longrightarrow$$

$$0<k<60 \quad \text{και} \quad -6<k<0 \Longrightarrow$$

$$-6<k<60$$

Αρα για τις τιμές του k *μεταξύ* –6 *και* 60 *το κλειστό σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Για τις τιμές* k=–6 *και* k=60 *το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο λόγω πόλων* $\{0\}$ *και* $\{j\sqrt{11},-j\sqrt{11}\}$ *αντίστοιχα, πολλαπλότητας ένα στον φανταστικό άξονα.* □

Σημείωση Το *πολικό αυτό διάγραμμα της* G(s) (G(s)K(s)) *όταν το* s *διατρέχει την καμπύλη* C *ονομάζεται* ***διάγραμμα*** **Nyquist**. □

Σημείωση Το *πολικό διάγραμμα της* G(jw) *και της* G(–jw) *είναι συμμετρικά επειδή οι δύο αυτές συναρτήσεις έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετα ορίσματα.*

Σημείωση Το *ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί βάσει του κριτηρίου* Routh *δεδομένου ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι*

$$H(s) = \frac{G(s)K}{1+G(s)K} = \frac{\dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}K}{1+\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{K}{s^3+6s^2+11s+6+k}$$

και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$a(s) = s^3+6s^2+11s+6+k$$

Σχηματίζω τον

<u>*Πίνακας* Routh</u>

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+k \\ s^1 & \frac{60-k}{6} & 0 \\ s^0 & 6+k & 0 \end{array}$$

Το *σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σύμφωνα με το κριτήριο* Routh *εαν και μόνο εαν*

$$60-k>0 \quad \textit{και} \quad 6+k>0 \Longrightarrow$$

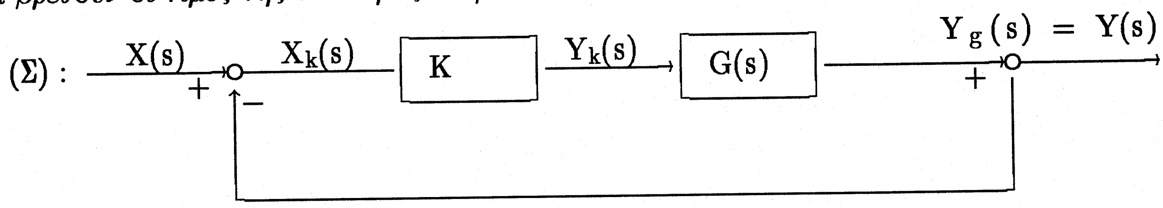
$$-6<k<60$$

Για την τιμή $k=-6$ *έχω ως πόλους τις τιμές* $\{0,-3-j\sqrt{11}, -3+j\sqrt{11}\}$ *και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο επειδή έχει έναν πόλο πολλαπλότητας ένα στον φανταστικό άξονα. Για την τιμή* $k=60$ *έχω ως πόλους τις τιμές* $\{-6,j\sqrt{11},-j\sqrt{11}\}$ *και άρα το σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο για τον ίδιο λόγο.* □

Παράδειγμα 47 *Εστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς*

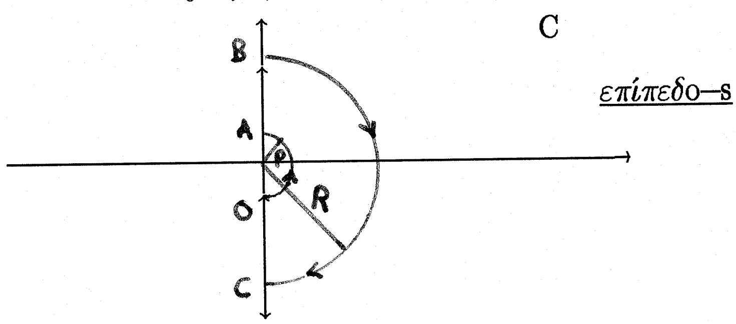
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς K *για τις οποίες το κλειστό σύστημα*



είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση *Εστω το επίπεδο–s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο*



<u>Βήμα 1</u> *Προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της* G(s)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Longrightarrow G(jw) = \frac{1}{jw(jw+1)} = \frac{1}{-w^2+jw} =$$

$$= \frac{-w^2 - jw}{w^4 + w^2} = -\frac{1}{w^2+1} - j\frac{1}{w^3+w}$$

Τιμές της G(s) για s πάνω στον φανταστικό άξονα της C

<u>Αρχική τιμή</u>

$s=\rho e^{j\theta}$ *όπου* $\theta\in[-90^0, 90^0]$ *και* $\rho\longrightarrow 0$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho\longrightarrow 0} \frac{1}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}+1)} \simeq \lim_{\rho\longrightarrow 0} \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} = \infty\, e^{-j\theta}$$

Καθώς θ *παίρνει τιμές στο διάστημα* $[-90^0,90^0]$ *η* $-\theta$ *παίρνει τιμές στο διάστημα* $[90^0,-90^0]$

<u>Ενδιάμεσες τιμές στον φανταστικό άξονα</u>

$w=1 \qquad G(j1) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$

$w=2 \qquad G(j2) = -\frac{1}{5} - j\frac{1}{10}$

$w=-1 \qquad G(-j1) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$

$w=-2 \qquad G(-j2) = -\frac{1}{5} + j\frac{1}{10}$

<u>Τελική τιμή</u>

$w\longrightarrow+\infty \qquad \lim_{w\longrightarrow+\infty} G(jw) = 0$

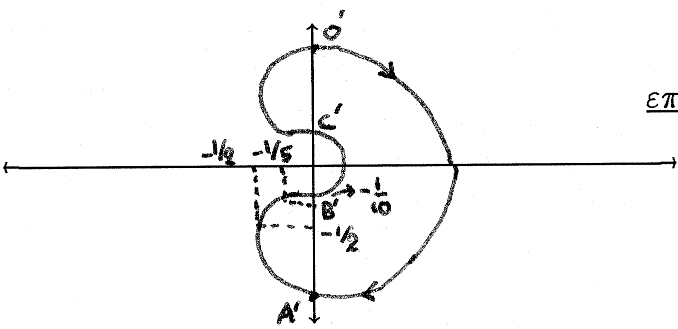
$w\longrightarrow-\infty \qquad \lim_{w\longrightarrow-\infty} G(jw) = 0$

Τιμές της G(s) για s στο υπόλοιπο τμήμα της C

$s=Re^{j\theta}$ *όπου* $R\longrightarrow\infty$ $\quad G(Re^{j\theta}) = \frac{1}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta}+1)} \simeq \frac{1}{R^2} e^{j(-2\theta)}$

$\theta\in[90^0, -90^0] \Longrightarrow -2\theta\in[-180^0, 180^0]$ *και* $\|G(Re^{j\theta})\| \longrightarrow 0$

Αρα *προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της* G(s) *έστω, όταν το* s *διαγράφει την καμπύλη* C *είναι* :



<u>*επίπεδο–G(s)*</u>

Το *κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η* Γ *περιστρέφει περί το σημείο* $(-\frac{1}{k}, 0)$

$$N = -P \quad \textit{φορές}$$

όπου P := *πόλοι της* G(s) *στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο (εκτός του φανταστικού άξονα).* Η G(s) *έχει όλους τους πόλους της* {0,–1} *έξω από το δεξιό μιγαδικό επίπεδο και άρα* P=0 *ή ισοδύναμα* N=0. Αρα *σύμφωνα με το κριτήριο του* Nyquist *το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εαν και μόνο εαν η καμπύλη* Γ *περιστρέφεται περί το σημείο* $(-\frac{1}{k}, 0)$ N=0 *φορές ή ισοδύναμα εαν και μόνο εαν*

$$-\frac{1}{k} < 0 \implies k>0$$

Αρα *για θετικές τιμές του* k *το σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.* Για k=0 *το σύστημα μου είναι ανοικτό και είναι ευσταθές σε κύκλο λόγω του ότι έχει έναν πόλο* {0} *στον φανταστικό άξονα πολλαπλότητας ένα.* □

Σημείωση Το *ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί βάσει του κριτηρίου* Routh *δεδομένου ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι*

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)K} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2+s+k}$$

και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$a(s) = s^2+s+k$$

Σ*χηματίζω τον*

<u>*Πίνακας* Routh</u>

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k \\ s & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{array}$$

Το *σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σύμφωνα με το κριτήριο* Routh *εαν και μόνο εαν* ($a_i>0$ i=0,1,2) *και συνεπώς* k>0 *και τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα* Routh *είναι θετικά, δηλαδή* k>0. Γ*ια την τιμή* k=0 *το σύστημα μου είναι ευσταθές σε κύκλο για τον λόγο που αναφέραμε και παραπάνω.* □

<u>Πλεονεκτήματα *κριτηρίου* Nyquist *έναντι κριτηρίου* Routh.</u>

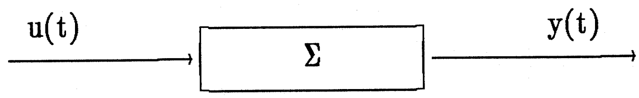
1) Η *εφαρμογή του κριτηρίου* Routh *χρειάζεται την αναλυτική περιγραφή του συστήματος σε αντίθεση με το κριτήριο* Nyquist *όπου το διάγραμμα* Nyquist *μπορεί να επιτευχθεί πειραματικά χωρίς γνώση της αναλυτικής περιγραφής του συστήματος.*

2) Μια *μεταβολή στις παραμέτρους του συστήματος (προσθήκη πόλων ή μηδενικών) έχει ως αποτέλεσμα να χρησιμοποιηθεί το κριτηρίου* Routh *από την αρχή σε αντίθεση με το κριτήριο* Nyquist *όπου είναι γνωστή η επίδραση των παραμέτρων του συστήματος στο διάγραμμα* Nyquist.

3) Το *διάγραμμα* Nyquist *μας δίνει πληροφορίες και για την θέση των πόλων του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς μας δίνει πληροφορίες για την σχετική ευστάθεια του συστήματος σε αντίθεση με το κριτήριο* Routh *που μας δίνει πληροφορίες μόνο για το αν το σύστημα είναι ευσταθές ή όχι.*

Ασκήσεις §12, §13, §14.

Ασκηση 1 *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ *μιας εισόδου και μιας εξόδου*

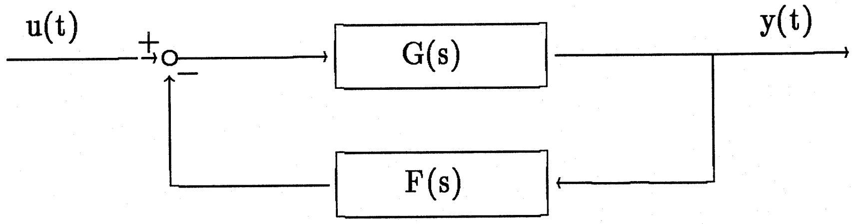


σχήμα 1

που διέπεται από τον παρακάτω νόμο

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 9y(t) = u(t)$$

α) Να *βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς* G(s) *του συστήματος μου.* Ακολούθως *θεωρείστε το κλειστό σύστημα* :



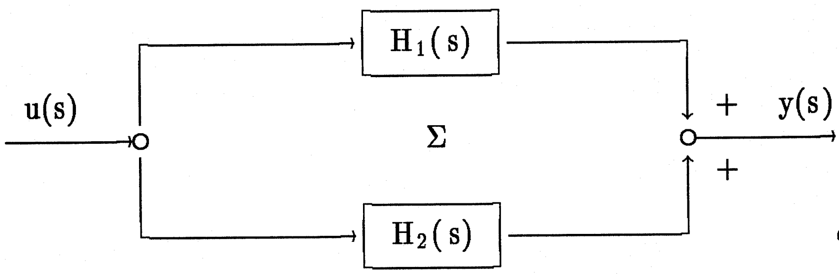
σχήμα 2

όπου F(s)=K(s+5) *με* K>0. Για *ποιές τιμές του* K *είναι το παραπάνω σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές* ;

β) Να *βρείτε βάση του κριτηρίου* Routh *τις τιμές του* K *για τις* οποίες *το κλειστό σύστημα του σχήματος* 2 *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν αντίστοιχα* F(s)=K *και* F(s)=K(s+5)(s+1).

γ) Ποια *συνέπεια έχει στο* εύρος *των τιμών* K ,*για τις* οποίες *το σύστημα είναι ευσταθές* , *η προσθήκη μηδενικών στην συνάρτηση μεταφοράς βρόγχου του κλειστού συστήματος βάσει του* (*α*) *και* (*β*).

Ασκηση 2 *Δίνεται το παρακάτω δυναμικό σύστημα* (Σ) *μ.ε.μ.ε*

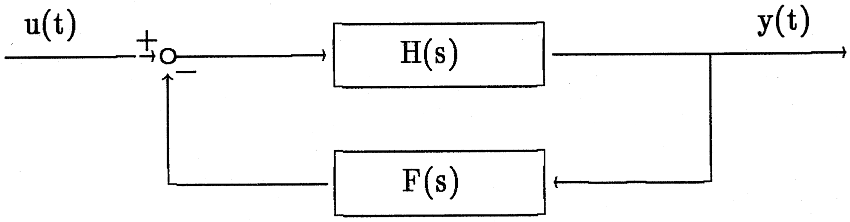


σχήμα 3

όπου $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \in \mathbb{R}(s)$ *και* $H_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \in \mathbb{R}(s)$.

α) Να *βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς* H(s) *του ανοικτού συστήματος* Σ. *Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές, ναι ή όχι και γιατί ;*

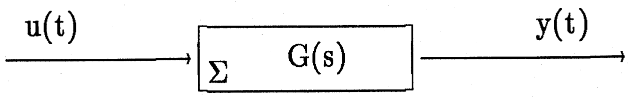
β) Να *βρείτε βάση του κριτηρίου* Routh *τις τιμές του* K *για τις οποίες το κλειστό σύστημα του σχήματος* 4 *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν αντίστοιχα* F(s)=K *και* $F(s)=\frac{K}{(s+4)}$ *όπου* H(s) *η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος του σχήματος* 1



σχήμα 4

γ) Ποια *συνέπεια έχει στο εύρος των τιμών* K *,για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές , η προσθήκη πόλων στην συνάρτηση μεταφοράς βρόγχου του κλειστού συστήματος βάσει των (α) και (β).*

Ασκηση 3 *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ *μιας εισόδου και μιας εξόδου*

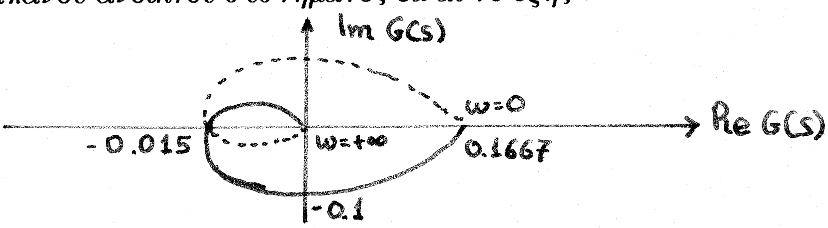


σχήμα 5

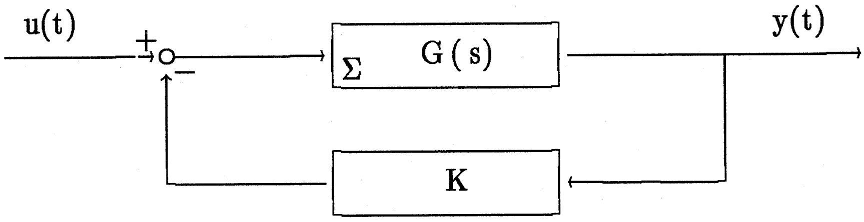
που διέπεται από τον παρακάτω νόμο

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = u(t)$$

όπου u(t) = 6*ημ*(9t) *με* t≥0. *Δεδομένου ότι το διάγραμμα* Nyquist *της συνάρτησης μεταφοράς* G(s) *του παραπάνου ανοικτού συστήματος είναι το εξής :*



να βρεθεί για ποιες τιμές του K *το παρακάτω κλειστό σύστημα είναι ευσταθές ;* (Να *χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του* Nyquist.)

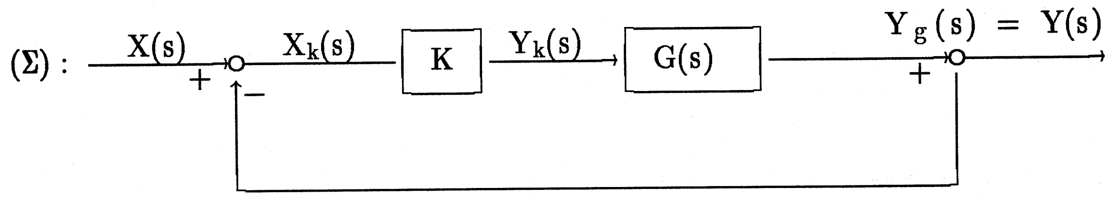


K ∈ ℝ

σχήμα 6

§15. *Γεωμετρικός τόπος ριζών.*

Εστω το κλειστό σύστημα :



Εστω $G(s) = \dfrac{h(s)}{d(s)}$ *και* K *σταθερά. Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω κλειστού συστήματος θα είναι :*

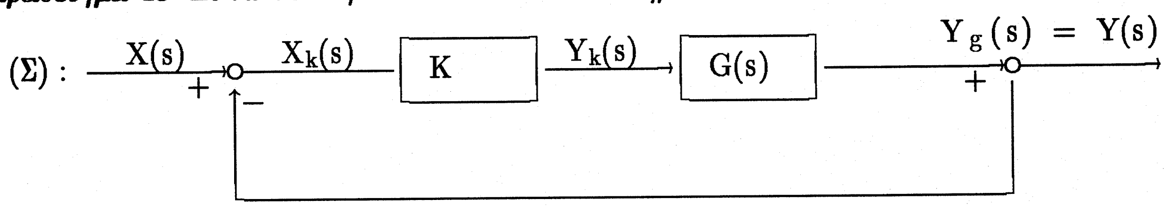
$$H(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K\dfrac{h(s)}{d(s)}}{1 + K\dfrac{h(s)}{d(s)}} = \frac{K\ h(s)}{d(s) + K\ h(s)}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών (Evans) (*δηλ. οι πόλοι του κλειστού συστήματος για τις διάφορες τιμές του* K) *του χαρακτηριστικού πολυωνύμου*

$$p_c(s) = d(s) + K\ h(s)$$

παίζει σημαντικό ρόλο στην ευστάθεια του συστήματος. Σε απλά παραδείγματα όπως το παρακάτω είναι εύκολη η κατασκευή του.

Παράδειγμα 48 *Εστω το παρακάτω κλειστό σύστημα*



όπου

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Να υπολογισθεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του χαρατηριστικού πολυωνύμου του κλειστού συστήματος.

Λύση *Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι*

$$H(s) = \frac{K}{s(s+1)+K} = \frac{1}{s^2+s+K}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος θα είναι :

$$p_c(s) = s^2+s+K$$

Οι πόλοι του συστήματος θα είναι :

$$s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4K}}{2} \quad \textit{και} \quad s_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4K}}{2}$$

Περίπτωση 1 $1-4K>0 \Rightarrow K < \frac{1}{4}$ *έχω ρίζες πραγματικές. Πιο συγκεκριμένα έχω*

$$s_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4K}}{2} < 0$$

και

i) $1-4K>1 \Rightarrow K<0$ *έχω* $s_1>0$

ii) $1-4K<1 \Rightarrow K>0$ *έχω* $s_1<0$

Περίπτωση 2 $1-4K<0 \Rightarrow K > \frac{1}{4}$ *έχω ρίζες μιγαδικές*

$$s_1 = \frac{-1 + j\sqrt{4K-1}}{2} \quad \textit{και} \quad s_2 = \frac{-1 - j\sqrt{4K-1}}{2}$$

με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Περίπτωση 3 $1-4K=0 \Rightarrow K = \frac{1}{4}$ *έχω την διπλή ρίζα*

$$s_{1,2} = \frac{-1}{2}$$

Αρα έχω συνοπτικά :

$-\infty < K < 0$ $\quad s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4K}}{2} > 0 \quad s_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4K}}{2} < 0$

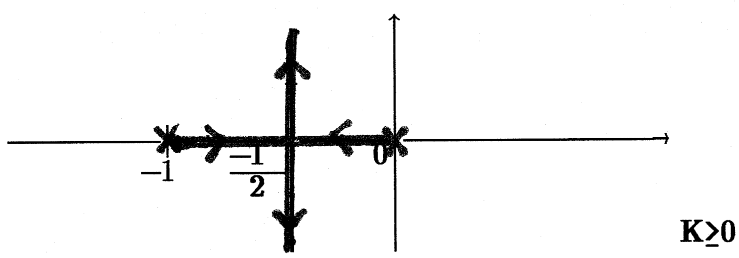
$K = 0$ $\quad s_1 = 0 \quad s_2 = -1$

$0 < K < \frac{1}{4}$ $\quad s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4K}}{2} < 0 \quad s_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4K}}{2} < 0$

$K = \frac{1}{4}$ $\quad$ *Διπλή ρίζα* $s_{1,2} = \frac{-1}{2} < 0$

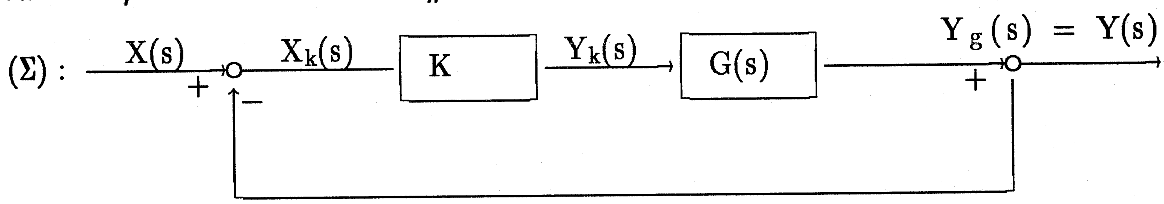
$\frac{1}{4} < K < +\infty$ $\quad s_1 = \frac{-1 + j\sqrt{4K-1}}{2}$ *και* $s_2 = \frac{-1 - j\sqrt{4K-1}}{2}$

και άρα ο γεωμετρικός τόπος των ριζώνν θα είναι :



□

Εστω το παρακάτω κλειστό σύστημα



όπου

$$G(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s-3)}$$

Θα προσπαθήσουμε να δούμε μερικούς βασικούς κανόνες κατασκευής του γεωμτρικού τόπου των ριζών με εφαρμογή στο παραπάνω σύστημα.

<u>*Βασικοί κανόνες κατασκευής γεωμετρικού τόπου ριζών.*</u>

Κανόνας 1 Κλάδοι.

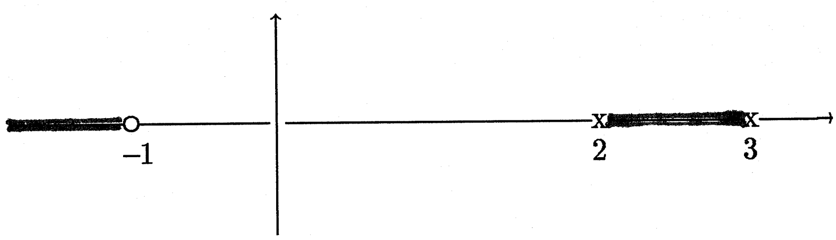
Οι κλάδοι του γεωμετρικού τόπου των ριζών (*των* οποίων *το πλήθος είναι ίσο με το* $\max(n_z,n_p)$ *όπου* n_z : *πλήθος των μηδενικών του ανοιχτού συστήματος και* n_p : *πλήθος των πόλων του ανοιχτού συστήματος*) *αρχίζουν από τους πόλους του ανοιχτού συστήματος και καταλήγουν στα μηδενικά του συστήματος ή στο άπειρο.*

Στο *παράδειγμα μας θα έχω δύο κλάδους* (max(2,1)) *που θα ξεκινούν από το* 2 (*πρώτος πόλος*) *και το* 3 (*δεύτερος πόλος*) *και θα καταλήγουν στο* –1 (*ρίζα*) *και στο* ∞. □

Κανόνας 2 Κλάδοι πάνω στον πραγματικό άξονα.

Ενα τμήμα του άξονα ℝ *μπορεί να είναι γ.τ.ρ.* ,*για* K≥0, (K≤0) *αν ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της* KG(s) (*η γενικά* G(s)F(s) *εαν αντί για* K *είχα* F(s)) *που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττός* (*άρτιος*).

Στο *παράδειγμα μας έχουμε*



Κανόνας 3 Συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα.

Επειδή οι μιγαδικές ρίζες έρχονται ανά συζυγή ζευγάρια γι'αυτό ο γ.τ.ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα. □

Κανόνας 4 Ασύμπτωτες.

Οταν το $K \to \infty$ τότε ο γ.τ.ρ. πλησιάζει ασυμπτωτικά ευθείες γραμμές που λέγονται ασύμπτωτες του γ.τ.ρ..

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι το

$$\sigma_a = \frac{[\Sigma \text{ πόλων της } G(s)] - [\Sigma \text{ μηδενικών της } G(s)]}{n_p - n_z}$$

όπου

n_p : το πλήθος των πόλων της $G(s)$

n_z : το πλήθος των μηδενικών της $G(s)$

Εχω δηλαδή :

$$\sigma_a = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{n_p - n_z}$$

Το πλήθος των ασυμπτώτων είναι :

$$n_p - n_z$$

Οι ασύμπτωτες σχηματίζουν γωνίες :

$$\phi_a = \frac{(2\ell+1)\pi}{n_p - n_z} \quad \text{για } K>0 \text{ και } \ell=0,1,2,\ldots,n_p - n_z - 1$$

$$\phi_a = \frac{2\ell\ \pi}{n_p - n_z} \quad \text{για } K\leq 0 \text{ και } \ell=0,1,2,\ldots,n_p - n_z - 1$$

Στο παράδειγμα μας το κέντρο των ασυμπτώτων θα είναι το σημείο

$$\sigma_a = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{n_p - n_z} = \frac{[2+3] - [-1]}{2-1} = +6$$

και οι γωνίες των ασυμπτώτων θα είναι :

$$\phi_a = \frac{(2\ell+1)\pi}{n_p - n_z} = \frac{(2\ell+1)\pi}{2-1} = (2\ell+1)\pi \quad \text{για } K>0 \text{ και } \ell=2-1-1=0$$

$$\text{δηλ. } \phi_a = \pi \text{ για } K>0$$

και

$$\phi_a = \frac{2\ell\ \pi}{n_p\ -\ n_z} = \frac{2\ell\ \pi}{2\ \ -\ 1} = 2\ell\,\pi \ \ \textit{για}\ \ K\leq 0 \ \ \textit{και}\ \ \ell=2-1-1=0$$

$$\textit{δηλ.}\ \phi_a = 0 \quad \textit{για}\ K\leq 0$$ □

Κανόνας 5 *Σημείο τομής με τον φανταστικό άξονα.*

Οι κλάδοι του γ.τ.ρ. είναι δυνατό μερικές φορές να τέμνουν τον φανταστικό άξονα. Τα *σημεία τομής μπορούν να βρεθούν από την εφαρμογή του κριτηρίου* Routh *στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος.*

Στην εφαρμογή μας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστου συστήματος είναι :

$$p_c(s) = s^2-5s+6 + K\,(s+1) = s^2 + (K-5)s + 6+K$$

Ο *πίνακας* Routh *είναι* :

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 6+K \\ s & K-5 & 0 \\ 1 & 6+K & 0 \end{array}$$

που μας δίνει ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για

$$K-5>0 \quad \textit{και} \quad 6+K>0 \Longrightarrow K>5$$

Αρα στο σημείο K=5 *έχω εναλλαγή από αστάθεια σε ασυμπτωτική ευστάθεια.* Η *εξίσωση που προκύπτει από την γραμμή* (s^2) *μας βοηθάει πάντα να βρούμε τα σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα.* Εχω *δηλαδή*

$$s^2 + (6+K) = 0 \overset{K=5}{\Longrightarrow} s^2 + 11 = 0 \Longrightarrow s = \pm j\sqrt{11} = \pm j\,3.316$$ □

Κανόνας 6 *Σημεία θλάσης.*

Σε περιπτώσεις που έχω δύο πραγματικούς πόλους (ή δυο πραγματικές ρίζες) του ανοικτού συστήματος που είναι τοποθετημένες η μια δίπλα στην άλλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε υπάρχει ένα σημείο από το οποίο φεύγει (ή αντίστοιχα έρχεται) ο *κλάδος των γ.τ.ρ.* . Εαν *θέλουμε να βρούμε αυτό το χαρακτηριστικό σημείο, λύνουμε την παρακάτω εξίσωση ως προς* K

$$1 + G(s)\,K = 0 \Longrightarrow 1 + \frac{h(s)}{d(s)}\,K = 0 \Longrightarrow$$

$$K = -\frac{d(s)}{h(s)}$$

και ακολούθως βρίσκω τις ρίζες της παραγώγου της παραπάνω έκφρασης ως προς s.

$$\frac{dK}{ds} = \frac{h^{(1)}(s)d(s) - h(s)d^{(1)}(s)}{h(s)^2}$$

Στην εφαρμογή μας έχω

$$K = -\frac{s^2-5s+6}{s+1} \Longrightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{1\,[s^2-5s+6] - [s+1][2s-5]}{(s+1)^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-s^2-2s+11}{(s+1)^2}$$

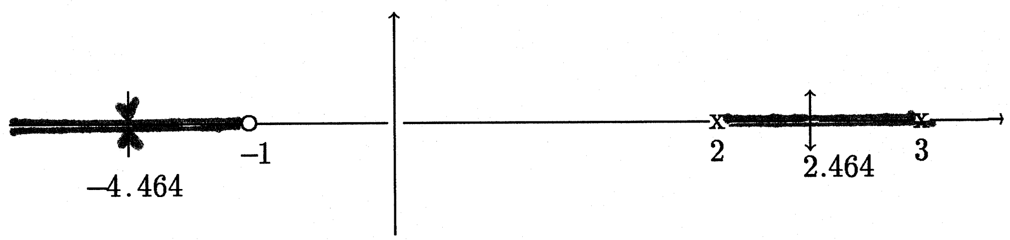
οπότε έχω $dK/ds = 0$ *για*

$$s_1 = -4.464 \quad \textit{και} \quad s_2 = 2.464$$

και αντίστοιχα για αυτές τις τιμές έχω

$$K_1 = 13.928 \quad \textit{και} \quad K_2 = 0.072$$

Οπότε θα έχω την παρακάτω γραφική παράσταση



□

Κανόνας 7 Γωνία άφιξης ή αναχώρησης.

Η γωνία που σχηματίζει ο γ.τ.ρ. στους πόλους και στα μηδενικά της G(s)K *(ή πιο γενικά* G(s)K(s)) *μπορεί να υπολογισθεί από τον παρακάτω τύπο :*

Η γωνία που σχηματίζεται στον πόλο $-p_q$ *είναι* ($s_1 \longrightarrow -p_q$)

$$\theta_{-p_q} = \angle(s_1+p_q) = -(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{n_z}\angle(s_1+z_i) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n_q}\angle(s_1+p_i) \quad K>0$$

$$\theta_{-p_q} = \angle(s_1+p_q) = -2k\pi + \sum_{i=1}^{n_z}\angle(s_1+z_i) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n_q}\angle(s_1+p_i) \quad K<0$$

ενώ η γωνία που σχηματίζεται στην ρίζα $-z_q$ ($s_1 \longrightarrow -z_q$) *είναι*

$$\theta_{-z_q} = \angle(s_1+z_q) = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n_z}\angle(s_1+z_i) + \sum_{i=1}^{n_q}\angle(s_1+p_i) \quad K>0$$

$$\theta_{-z_q} = \angle(s_1+z_q) = 2k\pi - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n_z}\angle(s_1+z_i) + \sum_{i=1}^{n_q}\angle(s_1+p_i) \quad K<0$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η γωνία εκκινήσεως του γ.τ.ρ. για $K \geq 0$ είναι ίση με την γωνία αφίξεως του γ.τ.ρ. όταν $K<0$.

Στην εφαρμογή μας θα έχουμε για $K>0$ (καθώς το $s_1 \to 2, 3, -1$)

$$\theta_2 = \angle (s_1-2) = -(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{1} \angle (s_1+1) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{2} \angle (s_1+p_i) =$$

$$= -(2k+1)\pi + \angle (s_1+1) - \angle (s_1-3) = -(2k+1)\pi + 0 - \pi = (-2k-2)\pi$$

$k = 0 \quad \theta = -2\pi$ ή ισοδύναμα $\theta_2 = 0$

$$\theta_3 = \angle (s_1-3) = -(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{1} \angle (s_1+1) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{2} \angle (s_1+p_i) =$$

$$= -(2k+1)\pi + \angle (s_1+1) - \angle (s_1-2) = -(2k+1)\pi + 0 - 0 = -(2k+1)\pi$$

$$k = 0 \,,\ \theta_3 = -\pi$$

$$\theta_{-1} = \angle (s_1+1) = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{1} \angle (s_1+z_i) + \sum_{i=1}^{2} \angle (s_1+p_i) \Longrightarrow$$

$$= \angle (s_1+1) = (2k+1)\pi + \angle (s_1-2) + \angle (s_1-3) = (2k+1)\pi + \pi + \pi = 2k\pi + \pi \Longrightarrow$$

$$k = 0 \quad , \quad \theta_{-1} = 3\pi$$ □

Τις τιμές του K για ορισμένες τιμές s_i του γ.τ.ρ. μπορώ να τις υπολογίσω από τον παρακάτω τύπο :

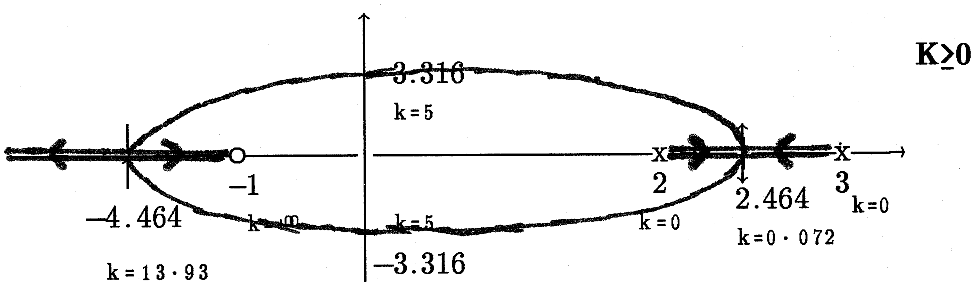
$$1 + K\, G(s_i) = 0 \Longrightarrow 1 + K \frac{h(s_i)}{d(s_i)} = 0 \Longrightarrow$$

$$K = -\frac{d(s_i)}{h(s_i)} \Longrightarrow \| K \| = \left\| \frac{d(s_i)}{h(s_i)} \right\|$$

Επίσης έχω ότι

$$\arg G(s_i)K = (2\ell+1)\pi \quad \ell=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$ □

Βάσει των όσων αναφέραμε παραπάνω μπορούμε να κατασκεύασουμε τον γ.τ.ρ. του παραπάνω κλειστού συστήματος ως εξής :



§16. Υπολογισμός αντισταθμιστού για επανατοποθέτηση πόλων κλειστού συστήματος.

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ, *μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας :*

$$x(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(s)$$

όπου $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. *Εστω*

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{h_{n-1}s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0}$$

όπου $h(s)$, $d(s)$ *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους.*

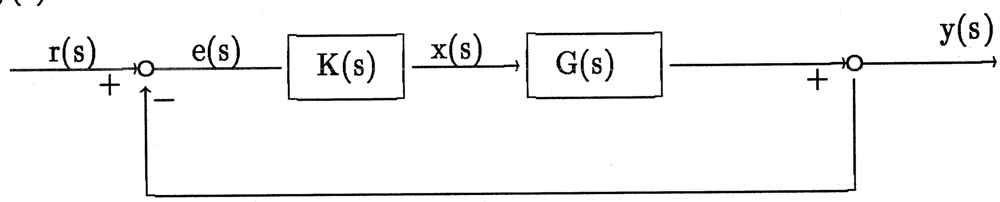
Πρόβλημα Σχεδιασμού Αντισταθμιστή (Design of Controller)

Να *προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς* $K(s)$ *ενός συστήματος (αντισταθμιστού)* (*compensator ή controller*)

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

όπου $\deg[h_c(s)] \leq \deg[d_c(s)]$ *έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του "κλειστού" συστήματος* $\Sigma_k : r(s) \longrightarrow y(s)$

(Σ_k) :



να έχει δεδομένους (επιθημητούς) πόλους. □

Ανάλυση

Εστω τα πολυώνυμα :

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0 \qquad (\deg d(s) = n)$$

$$h(s) = h_{n-1}s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0 \qquad (\deg h(s) \leq n-1)$$

Εστω :

$$\mathcal{S}(s) = \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad 2 \quad} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \\ \updownarrow n \end{array}$$

Ορίζουμε :

$$x(s) := \mathcal{S}(s) \begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}}_{\leftarrow 2n\times 2 \rightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix}}_{\leftarrow 2\times 1 \rightarrow} = \underbrace{\begin{bmatrix} d(s) \\ sd(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}d(s) \\ h(s) \\ sh(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}h(s) \end{bmatrix}}_{\leftarrow 2n\times 1 \rightarrow} \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \\ \updownarrow n \end{array}$$

οπότε έχουμε ότι

$$\deg x(s) = \max \{ \deg x_i(s) \} = 2n-1$$

άρα το x(s) *αναλύεται ως* :

$$x(s) = x_0 + x_1 s + \cdots + x_{2n-1} s^{2n-1} = [x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} := \mathcal{R}\, \hat{s}(s)$$

όπου :

$$\mathcal{R} = [x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & \cdots & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ \hline h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} & 0 \end{array}\right]$$

Θεώρημα (Sylvester)

Τα *πολυώνυμα* :

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_0 \qquad (\deg d(s) = n)$$

και

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0 \qquad (\deg h(s) \leq n-1)$$

είναι *<u>πρώτα</u>* *μεταξύ τους αν και μόνο αν*

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \mathcal{R} = 2n$$

Ο *πίνακας* $\mathcal{R}$ *ονομάζεται resultant των* d(s) *και* h(s). □

***Παράδειγμα* 49** Να *εξετασθεί αν τα πολυώνυμα*

$$d(s) = s^3 - 5s + 6$$

και

$$h(s) = s^2 - 4s + 4$$

είναι πρώτα μεταξύ τους.

Λύση Ο *πίνακας* $\mathcal{R}$ (*resultant*) *των* d(s) *και* h(s) *είναι* :

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Παρατηρώ *ότι*

$$\det R = 16 \neq 0$$

και συνεπώς τα πολυώνυμα d(s) *και* h(s) *είναι πρώτα μεταξύ τους.* □

Θεώρημα Αν *τα πολυώνυμα* :

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_0 \qquad (\deg d(s) = n)$$

και

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0 \qquad (\deg h(s) \leq n-1)$$

είναι πρώτα μεταξύ τους (αν δηλαδή $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \mathcal{R} = 2n$) *και*

$$\phi(s) = \phi_0 + \phi_1 s + \cdots + \phi_{2n-1} s^{2n-1}$$

είναι αυθαίρετο πολυώνυμο βαθμού : deg $\phi(s) \leq 2n-1$, *τότε υπάρχουν πολυώνυμα* $a(s)$ *και* $b(s)$ *βαθμού μικρότερου ή ίσου του* $n-1$ *τέτοια ώστε* :

$$a(s)\, d(s) + b(s)\, h(s) = \phi(s)$$

Απόδειξη Εστω

$$a(s) = a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

και

$$b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

τότε έχουμε ότι

$$a(s)\, d(s) + b(s)\, h(s) = \phi(s) \Longrightarrow$$

$$[a(s)\ b(s)]\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = [a_0,a_1,\ldots,a_{n-1} \mid b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}}_{\leftarrow\ 2n\times 2\ \rightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix}}_{\leftarrow\ 2\times 1\ \rightarrow} = \phi(s) \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T]\, \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} = [\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{2n-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T]\, \mathcal{R} = [\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{2n-1}] \underset{\text{πρώτα}}{\overset{h(s),\, d(s)}{\Longrightarrow}}$$

$$[a^T \mid b^T] = [\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{2n-1}]\, \mathcal{R}^{-1}$$ □

Παράδειγμα 50 *Εστω τα πολυώνυμα*

$$d(s) = s^3 - 5s + 6$$

και

$$h(s) = s^2 - 4s + 4$$

Υπάρχουν πολυώνυμα a(s) *και* b(s) *τέτοια ώστε να έχω*

$$a(s)\,[s^3 - 5s + 6] + b(s)\,[s^2 - 4s + 4] = s^4 - s^2 + s - 1$$

Λύση *Εχουμε δει στο παράδειγμα* 49 *ότι τα πολυώνυμα* d(s) *και* h(s) *είναι πρώτα μεταξύ τους και συνεπώς υπάρχουν πολυώνυμα* a(s) *και* b(s) *τέτοια ώστε να συμβαίνει η παραπάνω συνθήκη. Πιο συγκεκριμένα έχω ότι :*

$$[a^T \mid b^T] = [\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}]\, \mathcal{R}^{-1} \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T] = [-1, 1, -1, 0, 1, 0] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]^{-1} \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T] = [\frac{1}{8}, \frac{25}{16}, 0, -\frac{7}{16}, -\frac{19}{8}, -\frac{9}{16}]$$

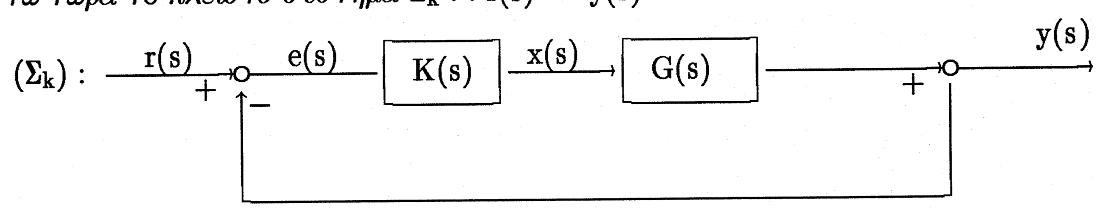
και συνεπώς

$$a(s) = \frac{25}{16}\, s + \frac{1}{8}$$

και

$$b(s) = -\frac{9}{16}\, s^2 - \frac{19}{8}\, s - \frac{7}{16}$$ □

Εστω τώρα το κλειστό σύστημα Σ_k : : $r(s) \longrightarrow y(s)$



όπου

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} \quad \textit{και} \quad K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

όπου h(s) *και* d(s) *είναι πρώτα μεταξύ τους.*

Η *συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος* Σ_k *θα είναι* :

$$H(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{h(s)h_c(s)}{d(s)d_c(s) + h(s)h_c(s)}$$

Εστω ότι θέλουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος

$$p_c(s) = d(s)d_c(s) + h(s)h_c(s)$$

να περιέχει τις ρίζες $-s_1, -s_2, \ldots, -s_n$ *όπου* $Re(-s_i) < 0$. *Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε κατάλληλα πολυώνυμα* $d_c(s)$ *και* $h_c(s)$ *έτσι ώστε να έχουμε τους επιθυμητούς πόλους. Ας θέσουμε*

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)}$$

όπου τα πολυώνυμα b(s) *και* a(s) *έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του* n–1 *και* q(s) *είναι ένα αυθαίρετο "ευσταθές" πολυώνυμο βαθμού* n–1. (*έχει όλες τις ρίζες του στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο*). *Τότε* :

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{d(s)[q(s)+a(s)] + h(s)b(s)} = \frac{h(s)\,b(s)}{d(s)q(s) + [d(s)a(s)+h(s)b(s)]}$$

Εστω τώρα :

$$\delta(s) = s^n + \delta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0 = \prod_{i=1}^{n}(s+s_i)$$

πολυώνυμο με τις επιθυμητές ρίζες $-s_i$, $Re(-s_i)<0$ *και έστω*

$$\delta(s) - d(s) = f(s)$$

και λόγω του ότι $\deg[\delta(s)] = n$, $\deg[d(s)] = n$ *έχω ως αποτέλεσμα ότι* $\deg[f(s)] \leq n$ *και* $\deg[q(s)f(s)] \leq 2n-1$. Ε*χω επίσης ότι τα πολυώνυμα* h(s) *και* d(s) *είναι πρώτα μεταξύ τους και συνεπώς υπάρχουν πολυώνυμα* a(s) *και* b(s) *τέτοια ώστε* :

$$a(s)\,d(s) + b(s)\,h(s) = q(s)f(s)$$

Τ*ότε*

$$H(s) = \frac{h(s)\,b(s)}{d(s)q(s) + [d(s)a(s)+h(s)b(s)]} = \frac{h(s)\,b(s)}{d(s)q(s) + f(s)q(s)} =$$

$$= \frac{h(s)\,b(s)}{q(s)\,[d(s) + f(s)]} = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}$$

Συμπέρασμα : Η *συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα έχει* :

1) Μηδενικά *τα μηδενικά του αρχικού συστήματος* (h(s)).

2) Μηδενικά *τα μηδενικά του πολυωνύμου* b(s) *τα οποία είναι μη ελέγξιμα*.

3) Πόλους *τα επιθυμητά μηδενικά* $-s_1, -s_2, \ldots, -s_n$ ($\delta(s)$).

4) Πόλους *τα μηδενικά του αυθαίρετου πολυωνύμου* q(s) *τα οποία είναι ελέγξιμα μια που το πολυώνυμο* q(s) *είναι αυθαίρετο*.

Αλγόριθμος υπολογισμού αντισταθμιστού για επανατοποθέτηση πόλων κλειστου συστήματος.

Εστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι :

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)}$$

όπου

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_0 \qquad (\deg d(s) = n)$$

και

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0 \qquad (\deg h(s) \leq n-1)$$

είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Θέλουμε έναν αντισταθμιστή

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

με $\deg[h_c(s)] \leq \deg[d_c(s)]$ *τέτοιο ώστε το κλειστό σύστημα μας να έχει ώς πόλους τις τιμές* $-s_1, -s_2, \ldots, -s_n$.

Βήμα 1 *Σχημάτισε το πολυώνυμο :*

$$\delta(s) = s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0 = \prod_{i=1}^{n} (s+s_i)$$

Βήμα 2 *Υπολόγισε την διαφορά :*

$$\delta(s) - d(s) = f(s) \qquad (\deg[f(s)] \leq n-1)$$

Βήμα 3 *Διάλεξε αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο* $q(s)$ *βαθμού* $n-1$

$$q(s) = q_{n-1} s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0 = \prod_{i=1}^{n-1} (s+\lambda_i) \qquad \mathrm{Re}(-\lambda_i) < 0$$

Βήμα 4 *Υπολόγισε πολυώνυμα* $a(s)$ *και* $b(s)$ *τέτοια ώστε :*

$$a(s)\, d(s) + b(s)\, h(s) = q(s) f(s)$$

βάσει του τύπου :

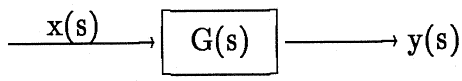
$$[a^T \mid b^T] = [\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}]\, \mathcal{R}^{-1}$$

όπου $\phi(s) = q(s)f(s) = \phi_0 + \phi_1 s + \cdots + \phi_{2n-1} s^{2n-1}$ *και* $\mathcal{R}$ *η* resultant *των* $d(s)$ *και* $h(s)$.

Βήμα 5 *Ο αντισταθμιστής* $K(s)$ *δίνεται από την σχέση :*

$$K(s) = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} \qquad \square$$

Παράδειγμα 51 *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ, *μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας :*



όπου $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ *και*

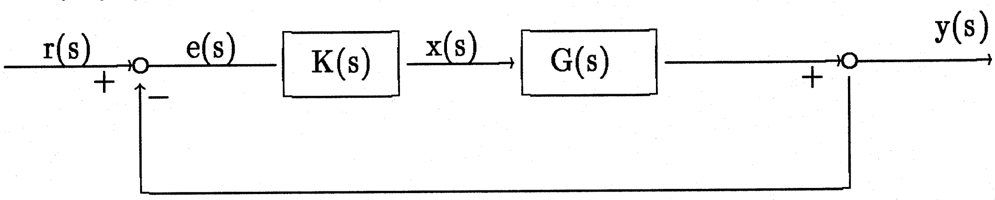
$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{s+1}{(s-2)(s-3)} = \frac{s+1}{s^2-5s+6}$$

όπου h(s) , d(s) *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους.* Να *προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς* K(s) *ενός συστήματος (αντισταθμιστού)* (*compensator ή controller*)

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του "κλειστού" συστήματος Σ_k : $r(s) \longrightarrow y(s)$

(Σ_k) :



να έχει τον διπλό πόλο –2.

Λύση

Βήμα 1 *Σχηματίζω το πολυώνυμο :*

$$\delta(s) = (s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4$$

Βήμα 2 *Υπολογίζω την διαφορά :*

$$f(s) = \delta(s) - d(s) = [s^2 + 4s + 4] - s^2 + 5s - 6 = 9s - 2$$

Βήμα 3 *Διαλέγω ένα αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο* q(s) *βαθμού* n–1 = 2–1 =1. Εστω :

$$q(s) = s+a$$

όπου $-a<0$.

Βήμα 4 *Υπολογίζω πολυώνυμα* a(s) *και* b(s) *τέτοια ώστε :*

$$a(s)\,d(s) + b(s)\,h(s) = q(s)f(s) \Longrightarrow$$

$$a(s)\,[s^2 - 5s + 6] + b(s)\,[s+1] = (s+a)(9s-2) = 9s^2 + (9a-2)s - 2a$$

ή ισοδύναμα :

$$[a^T \mid b^T] = [-2a, 9a-2, 9, 0] \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T] = [-\frac{11a-11}{12}, 0, \frac{42a-66}{12}, \frac{7a+97}{12}]$$

και άρα

$$a(s) = -\frac{11a-11}{12}$$

και

$$b(s) = \frac{42a-66}{12} + \frac{7a+97}{12} s$$

Βήμα 5 Ο *αντισταθμιστής του συστήματος θα είναι ο*

$$K(s) = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{(42a-66) + (7a+97)s}{12 s + (a+11)}$$

Παρατηρώ *δηλαδή ότι για διαφορετικές τιμές του* a *έχω διαφορετικούς αντισταθμιστές* K(s). □

Παράδειγμα 52 *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ, μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας :*

$$\xrightarrow{x(s)} \boxed{G(s)} \longrightarrow y(s)$$

όπου $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ *και*

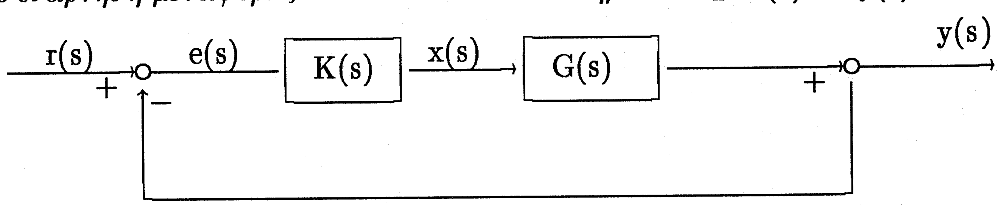
$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{s-1}{(s+2)(s-3)} = \frac{s-1}{s^2 - s - 6}$$

όπου h(s) , d(s) *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς* K(s) *ενός συστήματος (αντισταθμιστού) (compensator ή controller)*

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του "κλειστού" συστήματος $\Sigma_k : r(s) \longrightarrow y(s)$

(Σ_k) :



να έχει τον διπλό πόλο −1.

Λύση

Βήμα 1 *Σχηματίζω το πολυώνυμο* :

$$\delta(s) = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$$

Βήμα 2 *Υπολογίζω την διαφορά* :

$$f(s)\ 0\ \delta(s) - d(s) = [s^2 + 2s + 1] - s^2 + s + 6 = 3s + 7$$

Βήμα 3 *Διαλέγω ένα αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο* q(s) *βαθμού* n–1 = 2–1 =1. *Εστω* :

$$q(s) = s+2$$

όπου $-a<0$.

Βήμα 4 *Υπολογίζω πολυώνυμα* a(s) *και* b(s) *τέτοια ώστε* :

$$a(s)\ d(s) + b(s)\ h(s) = q(s)f(s) \Longrightarrow$$

$$a(s)\ [s^2 - s - 6] + b(s)\ [s-1] = (s+2)(3s+7) = 3s^2 + 13s + 14$$

ή ισοδύναμα :

$$[a^T \mid b^T] = [14, 13, 3, 0] \begin{bmatrix} -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Longrightarrow$$

$$[a^T \mid b^T] = [-5, 0, 16, 8]$$

και άρα

$$a(s) = -5$$

και

$$b(s) = 16 + 8s$$

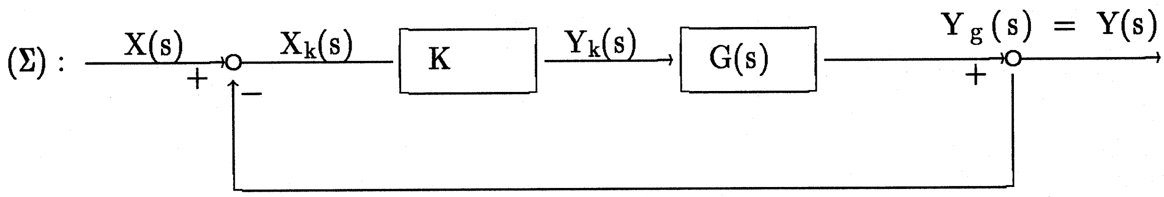
Βήμα 5 Ο *αντισταθμιστής του συστήματος θα είναι ο*

$$K(s) = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{16 + 8s}{[s+2] - 5} = \frac{16 + 8s}{s-3}$$

Παρατηρώ ότι αν έθετα ως q(s) = (s+a) *όπου* $-a<0$ *τότε θα έπαιρνα ως λύση μια πλειάδα επιθυμητών αντισταθμιστών* K(s). □

Ασκήσεις **§15, §16.**

Ασκηση **1** *Εστω το παρακάτω κλειστό σύστημα*

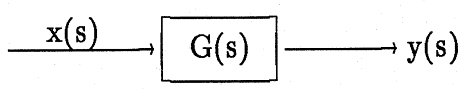


όπου

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$

Να υπολογισθεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του κλειστού συστήματος. □

Ασκηση **2** *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ, *μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας :*



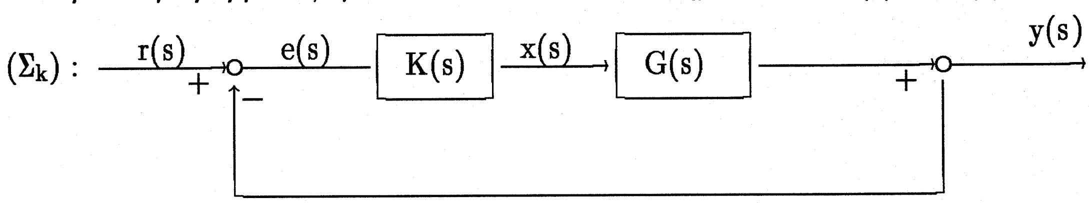
όπου $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ *και*

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)} = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$$

όπου h(s) , d(s) *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς* K(s) *ενός συστήματος (αντισταθμιστού) (compensator ή controller)*

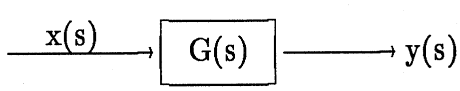
$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του "κλειστού" συστήματος Σ_k : $r(s) \longrightarrow y(s)$



να έχει ως πόλους τους −1 *και* −2. □

Ασκηση **3** *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ, *μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας :*



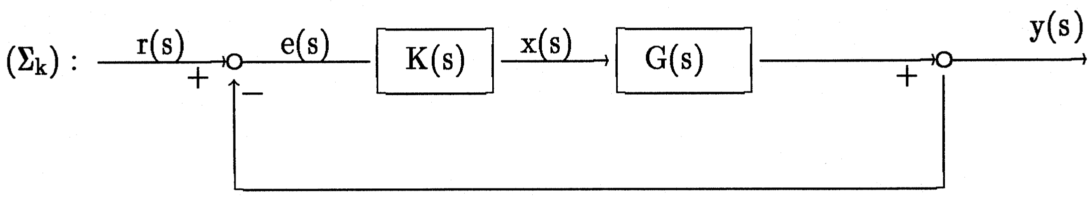
όπου y(s) = $\mathcal{L}$[y(t)] , x(s) = $\mathcal{L}$[x(t)] *και*

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{s-1}{s^2-5s+6}$$

όπου h(s) , d(s) *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους.* Να *προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς* K(s) *ενός συστήματος (αντισταθμιστού)* (*compensator ή controller*)

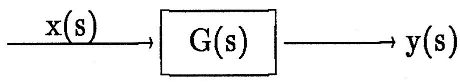
$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του "κλειστού" συστήματος Σ_k : r(s) ⟶ y(s)



να έχει έναν διπλό πόλο τον –1. □

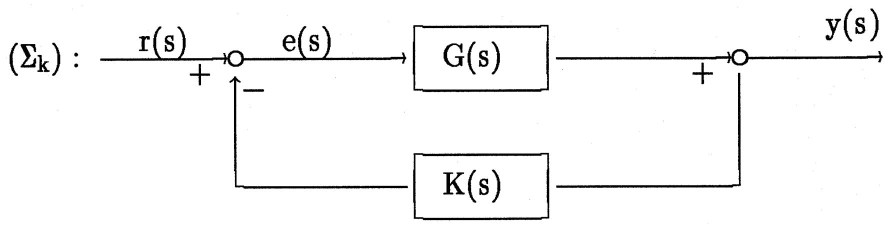
Ασκηση 4 *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ, *μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας* :



όπου y(s) = $\mathcal{L}$[y(t)] , x(s) = $\mathcal{L}$[x(t)] *και*

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{s-0.5}{s(s-1)} = \frac{s-0.5}{s^2-s}$$

όπου h(s) , d(s) *είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Εστω επίσης το κλειστό σύστημα* :



όπου :

$$K(s) = \frac{\kappa_2(s+\delta)}{s+\gamma}$$

Να *βρεθούν οι τιμές* κ_2,δ,γ *για τις οποίες το κλειστό σύστημα έχει όλους τους πόλους του στο σημείο* –1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α) Ξένη Βιβλιογραφία

[1] Ayres Frank, "Theory and Problems of Differential Equations", Shaum's Outline Series.

[2] Bronson Richard, "Modern Introductory, Theory and Problems of Differential Equations.", Shaum's Outline Series.

[3] Jamshidi M and Malek M. –Zavarei, "Linear Control Systems, A Computer–Aided Approach", International Series of System and Control, Vol.7, Pergamon Press, 1986.

[4] Kailath T., "Linear Systems", Prentice–Hall.

[5] Kamen Edward, "Introduction to Signal and Systems.", Macmillan Publishing Company., 1987.

[6] Shepley L.Ross, " Differential Equations".

[7] Vardulakis A.I., "Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods", John Wiley & Sons : Chichester, 1991.

[8] Vidyasagar M., "Control System Synthesis, A Factorization Approach", The MIT Press, 1985.

[9] "Laplace Transforms", The Open University, Linear Mathematics, Unit 29.

β) Ελληνική Βιβλιογραφία.

[1] *Βαρδουλάκης* A.I., "*Διδακτικές Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων* 1", *Θεσσαλονίκη* 1989.

[2] *Κυβεντίδης* Θ., "*Διαφορικές* Ε*ξισώσεις*", Α'Τ*όμος*, Θ*εσσαλονίκη* 1987.

[3] Π*αρασκευόπουλος* Π.Ν., "Σ*υστήματα* Α*υτομάτου* Ε*λέγχου*", Τ*όμος* Α,Β, Α*θήνα* 1986.

Προγράμματα Υπολογιστών

1. *Αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *μιας ρητής συνάρτησης.*
2. *Κριτήριο* Routh.
3. *Διαγράμματα* Nyquist *και* Bode.
4. *Γεωμετρικός τόπος ριζών.*

1. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μιας ρητής συνάρτησης.

```
10 '   The inverse Laplace transform of a rational function
20 '   X(s)=N(s)/D(s) where degree of N(s) < degree of D(s).
30 '   Input the polynomials in the form
40 '            p(s)=a(n)*s^n+a(n-1)*s^(n-1)+...+a(1)s+a(0).
50 '
60 '
70 '  Program by Robert S. Cooper -- University of Florida
80 '
90 '
100 CLS
110 IR=1  ' Dictates the order in which coefficients are read
120 PRINT: INPUT" Degree of N(s)=";N1
130 CLS
140 N=N1: PRINT: PRINT"Enter coefficients of N(s)":PRINT
150 '
160 ' Read in the numerator coefficients
170 '
180 GOSUB 1350
190 TOPCONST=A(N+1)
200 '
210 ' Find the roots of the numerator -- label them U(i) and V(i),
220 ' the real and imaginary parts respectively.
230 '
240 GOSUB 10000
250 CLS
260 FOR I=1 TO N1: U1(I)=U(I): V1(I)=V(I):NEXT
270 PRINT: INPUT" Degree of D(s)=";N2
280 N=N2: PRINT: PRINT"Enter coefficients of D(s)":PRINT
290 '
300 ' Read in the denominator coefficients
310 '
320 GOSUB 1350
330 BOTCONST=A(N+1)
340 '
350 ' Find the roots of the denominator -- label them U(i) and V(i),
360 ' the real and imaginary parts respectively.
370 '
380 GOSUB 10000
390 '
400 ' TOTCONST is the ratio of leading coefficients.
410 '
420 TOTCONST=TOPCONST/BOTCONST
430 CLS
440 FOR J=1 TO N2: U2(J)=U(J): V2(J)=V(J):NEXT
450 '
460 ' Outer loop determines the coefficient (magnitude and angle)
470 ' of each partial fraction expansion term.  First nested
480 ' loop substitutes the Ith root into the transfer function
490 ' numerator.  The second nested loop substitutes the root
500 ' into the rest of the transfer function's denominator.
510 ' Then the two are divided, yielding the coefficient.
520 '
530 FOR I=1 TO N2
540 TOPMAG=1:TOPANGLE=0
550     FOR J=1 TO N1
560     TOPREAL=U2(I) - U1(J)
570     TOPIMAG = V2(I) - V1(J)
580     TOPMAG = SQR(TOPREAL^2 + TOPIMAG^2) * TOPMAG
```

```
590      IF TOPREAL=0 AND SGN(TOPIMAG)=1  THEN ANGLE=90:GOTO 640
600      IF TOPREAL=0 AND SGN(TOPIMAG)=0  THEN ANGLE=0 :GOTO 640
610      IF TOPREAL=0 AND SGN(TOPIMAG)=-1 THEN ANGLE=-90:GOTO 640
620      ANGLE = ATN(TOPIMAG/TOPREAL)*57.29577951#
630      IF SGN(TOPREAL) = -1 THEN ANGLE=ANGLE + 180
640      TOPANGLE = TOPANGLE + ANGLE
650      NEXT J
660 BOTMAG = 1:BOTANGLE = 0
670      FOR J=1 TO N2
680      IF J=I THEN GOTO 780
690      BOTREAL=U2(I) - U2(J)
700      BOTIMAG = V2(I) - V2(J)
710      BOTMAG = SQR(BOTREAL^2 + BOTIMAG^2) * BOTMAG
720      IF BOTREAL=0 AND SGN(BOTIMAG)=1  THEN ANGLE=90:GOTO 770
730      IF BOTREAL=0 AND SGN(BOTIMAG)=0  THEN ANGLE=0 :GOTO 770
740      IF BOTREAL=0 AND SGN(BOTIMAG)=-1 THEN ANGLE=-90:GOTO 770
750      ANGLE = ATN(BOTIMAG/BOTREAL)*57.29577951#
760      IF SGN(BOTREAL) = -1 THEN ANGLE=ANGLE + 180
770      BOTANGLE = BOTANGLE + ANGLE
780      NEXT J
790 TOTALMAG(I) = TOPMAG/BOTMAG
800 TOTANGLE(I) = TOPANGLE - BOTANGLE
810 NEXT I
820   FOR I=1 TO N2
830   TOTANGLE(I)=(TOTANGLE(I)/360 - FIX(TOTANGLE(I)/360))*360
840   IF TOTANGLE(I)>180 THEN TOTANGLE(I)=TOTANGLE(I)-360
850   IF TOTANGLE(I)<-180 THEN TOTANGLE(I)=360+TOTANGLE(I)
860   DUMMY1=ABS(ABS(TOTANGLE(I))-180)
870   IF DUMMY1 < .00001 THEN TOTANGLE(I)=0:TOTALMAG(I)=-TOTALMAG(I)
880   NEXT I
890 '
900 ' This is simply a reordering routine.  The loop
910 ' reorders complex conjugate pairs so that the terms
920 ' with positive imaginary parts come first.
930 '
940 FOR I=1 TO N2
950   FOR J=(I+1) TO N2
960   IF V2(I) >= V2(J) THEN GOTO 1090
970   DUMMY1 = TOTANGLE(J)
980   DUMMY2 = TOTALMAG(J)
990   DUMMY3 = U2(J)
1000   DUMMY4 = V2(J)
1010   TOTANGLE(J) = TOTANGLE(I)
1020   TOTALMAG(J) = TOTALMAG(I)
1030   U2(J) = U2(I)
1040   V2(J) = V2(I)
1050   TOTANGLE(I) = DUMMY1
1060   TOTALMAG(I) = DUMMY2
1070   U2(I) = DUMMY3
1080   V2(I) = DUMMY4
1090   NEXT J
1100 NEXT I
1110 '
1120 ' This loop COUNTs the number of complex conjugate pairs.
1130 '
1140 COUNT = 0
1150 FOR I=1 TO N2
1160 IF (V2(I))>.00001 THEN COUNT=COUNT+1
1170 NEXT I
1180 CLS
1190 '
1200 ' Un-normalize each partial fraction term. Print the result.
1210 '
1220 FOR I=1 TO N2: TOTALMAG(I)=TOTALMAG(I)*TOTCONST:NEXT I
1230 PRINT "The inverse Laplace transform of X(s) = "
1240   FOR I=1 TO COUNT
1250   DUMMY2 = 2*TOTALMAG(I)
1260   PRINT USING "+####.####exp(####.##t)";DUMMY2;U2(I);
1265   PRINT USING "cos(####.##t";V2(I);
1270   PRINT USING " +###.##) ";TOTANGLE(I);
1280   NEXT I
```

```
1290 DUMMY1 = N2-COUNT
1300 FOR I=(COUNT-1) TO DUMMY1
1310 PRINT USING "-####.####exp(####.##t) ";TOTALMAG(I);U2(I);
1320 NEXT I
1330 END
1340 '
1350 '   Subroutine for entering polynomial coefficient array
1360 '
1370 FOR I=0 TO N
1380 PRINT" for i=";I: INPUT"a(i)=";A(I+1)
1390 NEXT I
1400 RETURN
10000 IV=IR
10010 NC=N+1
10020 FOR I=1 TO NC: H(I)=A(I): NEXT
10030 P=0: R=0: Q=0
10040 IF H(1)<>0 THEN 10080
10050 NC=NC-1: U(NC)=0: V(NC)=0
10060 FOR I=1 TO NC: H(I)=H(I+1): NEXT
10070 GOTO 10040
10080 IF NC=1 THEN RETURN
10090 IF NC=2 THEN R=-H(1)/H(2): GOTO 10390
10100 IF NC=3 THEN P=H(2)/H(3): Q=H(1)/H(3): GOTO 10460
10110 IF ABS(H(NC-1)/H(NC))>=ABS(H(2)/H(1)) THEN GOTO 10180
10120 IV=-IV
10130 M=INT(NC/2-.1)
10140 FOR I=1 TO M:NL=NC+1-I:F=H(NL):H(NL)=H(I):H(I)=F:NEXT
10150 IF Q=0 THEN P=0: GOTO 10170
10160 P=P/Q: Q=1/Q
10170 IF R<>0 THEN R=1/R
10180 E0=1E-09: REM sets accuracy
10190 B(NC)=H(NC):C(NC)=H(NC):B(NC+1)=0:C(NC+1)=0:NP=NC-1
10200 FOR J=1 TO 1000
10210 FOR I1=1 TO NP:I=NC-I1:B(I)=H(I)+R*B(I+1):C(I)=B(I)+R*C(I+1)
10220 NEXT:IF ABS(B(1)/H(1))<=E0 THEN 10390
10230 IF C(2)=0 THEN R=R+1: GOTO 10250
10240 R=R-B(1)/C(2)
10250 FOR I1=1 TO NP
10260 I=NC-I1:B(I)=H(I)-P*B(I+1)-Q*B(I+2)
10270 C(I)=B(I)-P*C(I+1)-Q*C(I+2):NEXT I1
10280 IF H(2)<>0 THEN 10310
10290 IF ABS(B(2)/H(1))<=E0 THEN 10320
10300 IF ABS(B(2)/H(1))>E0 THEN 10330
10310 IF ABS(B(2)/H(2))>E0 THEN 10330
10320 IF ABS(B(1)/H(1))<=E0 THEN 10460
10330 CB=C(2)-B(2): D=C(3)*C(3)-CB*C(4): IF D<>0 THEN 10350
10340 P=P-2: Q=Q*(Q-1): GOTO 10370
10350 P=P+(B(2)*C(3)-B(1)*C(4))/D
10360 Q=Q+(-B(2)*CB-B(1)*C(3))/D
10370 NEXT J
10380 E0=E0*10: GOTO 10200
10390 NC=NC-1
10400 V(NC)=0
10410 IF IV>=0 THEN 10430
10420 U(NC)=1/R: GOTO 10440
10430 U(NC)=R
10440 FOR I=1 TO NC: H(I)=B(I+1): NEXT
10450 GOTO 10080
10460 NC=NC-2
10470 IF IV>=0 THEN 10490
10480 QP=1/Q: PP=P/(Q*2): GOTO 10500
10490 QP=Q: PP=P/2
10500 F=PP*PP-QP: IF F>=0 THEN 10520
10510 U(NC+1)=-PP:U(NC)=-PP:V(NC+1)=SQR(-F):V(NC)=-V(NC+1):GOTO 10570
10520 IF PP<>0 THEN 10540
10530 U(NC+1)=-SQR(F): GOTO 10550
10540 U(NC+1)=-(PP/ABS(PP))*(ABS(PP)+SQR(F))
10550 V(NC+1)=0
10560 U(NC)=QP/U(NC+1): V(NC)=0
10570 FOR I=1 TO NC: H(I)=B(I+2): NEXT
10580 GOTO 10080
```

2. Κριτήριο Routh.

```
10   ! PROGRAM NAME : "ROUTH" PROG
20   PRINT " This program determines the STABILITY of a Single-Input"
30   PRINT "  Single-Output system via ROUTH-HURWITZ CRITERION"
40   OPTION BASE 1
50   DIM A(11),B(11),X(11),R(11,11)
60   INPUT "Give degrees of Numerator(m<=10) & Denominator(n<=10)",M,N
70   PRINT "Numerator Degree m=";M;"Denominator Degree n=";N
80   IF (N>10) OR (M>10) THEN 60
90   M1=M+1
100  N1=N+1
110  IF M1>N1 THEN 140
120  S=N1
130  GOTO 150
140  S=M1
150  REDIM A(S),B(S),X(S),R(S,6)
160  ! SET EXISTING & ROUTH ARRAYS EQUAL TO ZERO
170  MAT A=ZER
180  MAT B=ZER
190  MAT X=ZER
200  MAT R=ZER
210  ! N2 = NO. OF COLUMNS IN THE ROUTH ARRAY
220  N2=(S-1)/2+1
230  PRINT "Enter NUMERATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:"
240  FOR I1=1 TO M1
250  I=I1-1
260  DISP "A(";I;")";
270  INPUT A(I1)
280  NEXT I1
290  MAT PRINT A;
300  INPUT "Are NUMERATOR COEFFICIENTS CORRECT?",N$
310  IF (N$="N") OR (N$="n") THEN 230
320  PRINT "Enter DENOMINATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:"
330  FOR J1=1 TO N1
340  J=J1-1
350  DISP "B(";J;")";
360  INPUT B(J1)
370  NEXT J1
380  MAT PRINT B;
390  INPUT "Are DENOMINATOR COEFFICIENTS CORRECT?",D$
400  IF (D$="N") OR (D$="n") THEN 320
410  ! FIND THE CHARACT. EQ. BY ADDING NUMERATOR & DENOMINATOR COEFFICIENTS
420  MAT X=A+B
430  ! FIND THE FIRST TWO ROWS OF THE ROUTH ARRAY
440  L=S
450  FOR J=1 TO N2
460  FOR K=1 TO 2
470  R(K,J)=X(L)
480  L=L-1
490  NEXT K
500  IF L=1 THEN 530
510  NEXT J
520  GOTO 550
530  R(1,N2)=X(1)
540  R(2,N2)=0
550  ! CALCULATE THE ROUTH MEMBERS
560  Q=0
570  Lp2=S-1
580  Lj=(S+1)/2
590  FOR I=1 TO Lp2
600  IF I=1 THEN 680
610  FOR J=2 TO Lj
620  Rp1=R(I,1)*R(I-1,J)
630  Rp2=R(I-1,1)*R(I,J)
640  Rp3=Rp1-Rp2
650  R(I+1,J-1)=Rp3/R(I,1)
660  NEXT J
670  ! IS A MEMBER OF THE FIRST COLUMN EQUAL TO ZERO?
680  W=R(I+1,1)
690  IF W<>0 THEN 860
700  ! DOES A ROW CONTAIN ALL ZEROS?
710  FOR J=2 TO Lj
720  IF (R(I+1,J)>1E-9) OR (R(I+1,J)<-1E-9) THEN 850
730  NEXT J
740  Q=Q+1
```

```
750  ! DIFFERENTIATE THE AUXILARY EQUATION
760  Lc=(S-I)/2
770  K=I-1
780  FOR J=1 TO 10
790  R(I+1,J)=R(I,J)*(Lp2-K)
800  IF Lc<1 THEN 860
810  Lc=Lc-1
820  K=K+2
830  NEXT J
840  ! REPLACE A ZERO IN THE FIRST COLUMN BY A SMALL NUMBER
850  R(I+1,1)=1E-10
860  NEXT I
870  IF Q=0 THEN 920
880  ! WARNING ON THE EXISTANCE OF AN AUXILARY EQUATION
890  PRINT "WARNING !!! Your system's CHARACTERISTIC EQUATION contains an"
900  PRINT " AUXILARY EQUATION. There could be poles on the jw-axis causing"
910  PRINT " OSSCILLATORY characteristics!!"
920  PRINT LIN(1)," ***  ROUTH-HURWITZ ARRAY  ***",LIN(1)
930  FIXED 2
940  MAT PRINT R;
950  FIXED 0
960  ! COUNT THE NUMBER OF SIGN CHANGES IN THE FIRST COLUMN
970  Q=C=0
980  IF R(1,1)<0 THEN 1000
990  C=1
1000 FOR I=2 TO S
1010 IF R(I,1)>=0 THEN 1060
1020 IF C=0 THEN 1090
1030 Q=Q+1
1040 C=0
1050 GOTO 1090
1060 IF C=1 THEN 1090
1070 Q=Q+1
1080 C=1
1090 NEXT I
1100 ! NUMBER OF POLES IN THE RIGHT-HALF-PLANE & STABILITY STATUS
1110 PRINT "  Number of ROOTS in the RIGHT-HALF-PLANE = ";Q
1120 IF Q<>0 THEN 1150
1130 PRINT LIN(1),"SYSTEM IS STABLE."
1140 GOTO 1160
1150 PRINT LIN(1),"SYSTEM IS UNSTABLE."
1160 INPUT "Do you like to RUN another program (Y/N)?",P$
1170 IF (P$="Y") OR (P$="y") THEN 60
1180 END
```

Example

```
 This program determines the STABILITY of a Single-Input
  Single-Output system via ROUTH-HURWITZ CRITERION
Numerator Degree m= 2 Denominator Degree n= 5
Enter NUMERATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 9  11  4  0  0  0

Enter DENOMINATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 1  2  0  2  2  1

   ***  ROUTH-HURWITZ ARRAY  ***

 1.00  2.00  13.00  0.00  0.00  0.00
```

ROUTH-HURWITZ STABILITY CRITERION

```
  2.00   4.00   10.00   0.00   0.00   0.00

  .00   8.00   0.00   0.00   0.00   0.00

 -159999999996.00   10.00   0.00   0.00   0.00   0.00

  8.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00

  10.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00


  Number of ROOTS in the RIGHT-HALF-PLANE =  2

SYSTEM IS UNSTABLE.

Numerator Degree m= 0 Dencminator Degree n= 4
Enter NUMERATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 24  0  0  0  0

Enter DENCMINATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 0  50  35  10  1

  ***  ROUTH-HURWITZ ARRAY  ***

 1.00   35.00   24.00   0.00   0.00   0.00

 10.00   50.00   0.00   0.00   0.00   0.00

 30.00   24.00   0.00   0.00   0.00   0.00

 42.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00

 24.00   0.00   0.00   0.00   0.00   0.00


  Number of ROOTS in the RIGHT-HALF-PLANE =  0

SYSTEM IS STABLE.

Numerator Degree m= 1 Dencminator Degree n= 5
Enter NUMERATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 13  3  0  0  0  0

Enter DENCMINATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
 50  0  24  4  1  1
WARNING !!! Your system's CHARACTERISTIC EQUATION contains
an AUXILARY EQUATION. There could be poles on the jw-axis
causing OSSCILLATORY characteristics!!
```

*** ROUTH-HURWITZ ARRAY ***

1.00	4.00	3.00	0.00	0.00	0.00
1.00	24.00	63.00	0.00	0.00	0.00
-20.00	-60.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21.00	63.00	0.00	0.00	0.00	0.00
42.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
63.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Number of ROOTS in the RIGHT-HALF-PLANE = 2

SYSTEM IS UNSTABLE.

Numerator Degree m= 4 Denominator Degree n= 10
Enter NUMERATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
1 4 5 2 1 0 0 0 0 0 0
Enter DENOMINATOR COEFFICIENTS in ASCENDING ORDER:
10 10 5 3 4 12 9 4 5 3 1

*** ROUTH-HURWITZ ARRAY ***

1.00	5.00	9.00	5.00	10.00	11.00
3.00	4.00	12.00	5.00	14.00	0.00
3.67	5.00	3.33	5.33	11.00	0.00
-.09	9.27	.64	5.00	0.00	0.00
379.00	29.00	207.00	11.00	0.00	0.00
9.28	.69	5.00	0.00	0.00	0.00
.98	2.68	11.00	0.00	0.00	0.00
-24.67	-98.97	0.00	0.00	0.00	0.00
-1.26	11.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-315.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

3. Διαγράμματα Nyquist και Bode.


```
10  !      PROGRAM NAME : "BNPLOT" PROG
20  !       THIS PROGRAM DRAWS THE BODE & NYQUIST PLOTS FOR
30  !       A LINEAR CONTINUOUS- & DISCRETE-TIME SYSTEM FROM
40  !       THEIR Laplace- OR Z-transforms.
50   DIM Gonogo$(3),Type$(7),Zp$(1),Pr(10),Pi(10),Zr(10),Zi(10)
60   DIM Ar(10),Ai(10),Xtitle$(30),Ytitle$(30)
70   PRINT "This program constructs BODE & NYQUIST plots for CONT. & DIS.-TIME"
80   PRINT "transfer functions of up to 10 poles & 10 zeros. Functoons must  "
90   PRINT "be of the form   K(s+Z1)(s+Z2).../(s+P1)(s+P2)  "
100  PRINT "  OR    K(z+Z1)(z+Z2).../(z+P1)(z+P2)  , where K is the GAIN,"
110  PRINT " Z's are the zeros & -P's are the poles.",LIN(1)
120  PRINT "  All poles & zeros should be in first-order form. Those which"
130  PRINT "are not snould be factored until they are. Multiple poles or zeros"
140  PRINT "should be entered as if tney were separate.",LIN(1)
150  PRINT "You will be asked to enter information after which you should hit"
160  PRINT "the CONT key to continue."
170  Iplot=0
180  INPUT "Do you wish to start a new problem (Y/N)?",Gonogo$
190  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 220
200  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN STOP
210  GOTO 170
220  INPUT "What kind of plots do you wish(BODE or NYQUIST)?",Type$
230  IF (Type$<>"BODE") AND (Type$<>"NYQUIST") THEN 220
240  PRINT PAGE,"You have asked for ";Type$;" plots"
250  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
260  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 290
270  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 220
280  GOTO 250
290  INPUT "How many ZEROS are in this function(<=10)?",Nzeros
300  INPUT "How many POLES are in this function(<=10)?",Npoles
310  PRINT LIN(1),"Your function has ";Nzeros;" zero(s) & ";Npoles;" pole(s)"
320  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
330  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 360
340  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 290
350  GOTO 320
360  INPUT "Type the GAIN of the system (K>=1)",K
370  IF K<=0 THEN 360
380  PRINT LIN(2),"The GAIN of the system is ";K
390  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
400  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 430
410  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 360
420  GOTO 390
430  IF Nzeros=0 THEN 540
440  PRINT LIN(2),"Enter the -ZEROS in complex form. If either the real or"
450  PRINT "imaginary part is 0.0, enter as such. Reminder : The -ZERO in a"
460  PRINT "term (s+3-j2) or (z+3-j2) is 3-j2.(Note:-ZERO=0=0+j0)",LIN(1)
470  Zp$="-Z"
480  Nn=Nzeros
490  GOSUB Zpread
500  FOR J=1 TO Nzeros
510  Zr(J)=Ar(J)
520  Zi(J)=Ai(J)
530  NEXT J
540  PRINT LIN(2),"Enter the -POLES in complex form. If either the real or"
550  PRINT "imaginary part is 0.0, enter as such. Reminder : The pole in a"
560  PRINT "term such as (s+3-j2) or (z+3-j2) is 3-j2.(Note:-POLE=0=0+j0)"
570  Zp$="-P"
580  Nn=Npoles
590  GOSUB Zpread
600  FOR I=1 TO Npoles
610  Pr(I)=Ar(I)
620  Pi(I)=Ai(I)
630  NEXT I
640  PRINT LIN(2),"Transfer function summary for ";Type$;" plots"
650  PRINT LIN(1),"The GAIN is ";K,LIN(1),"The -ZEROS are",LIN(1)
660  IF Nzeros=0 THEN 700
670  FOR I=1 TO Nzeros
680  PRINT "-Z";I;"= ";Zr(I);" +j";Zi(I)
```

```
690   NEXT I
700   PRINT LIN(1),"The -POLES are",LIN(2)
710   FOR I=1 TO Npoles
720   PRINT "-P";I;" = ";Pr(I);" +j";Pi(I)
730   NEXT I
740   PRINT LIN(2),"Hit the CONT key to continue"
750   PAUSE
760   IF Type$="NYQUIST" THEN 2080
770   PRINT LIN(2),"Specify a FREQUENCY RANGE you wish to plot over"
780   PRINT "Example: 0.1<=W<=1000."
790   INPUT "Input MINIMUM frequency (Must be a power of 10.)",Wmin
800   Value=FRACT(LGT(Wmin))
810   IF ABS(Value)>.0000001 THEN 790
820   INPUT "Input MAXIMUM frequency (Must be a power of 10.)",Wmax
830   Value=FRACT(LGT(Wmax))
840   IF ABS(Value)>.0000001 THEN 820
850   IF Wmin>=Wmax THEN 870
860   GOTO 890
870   PRINT LIN(1),"Your MINIMUM value >= Your MAXIMUM...Try again"
880   GOTO 790
890   PRINT LIN(2),"The FREQUENCY RANGE of your plot is ";Wmin;" <=W<= ";Wmax
900   INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
910   IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 940
920   IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 790
930   GOTO 900
940   PRINT LIN(1),"For the MAGNITUDE BODE PLOT,Specify a DECIBEL RANGE you"
950   PRINT "wish to plot over. Example: -40<=DB<=60..Must be a multiple of 20."
960   INPUT "Input the MINIMUM DB (Multiple of 20.)",Dbmin
970   Value=FRACT(Dbmin/20)
980   IF ABS(Value)>.00001 THEN 960
990   INPUT "Input the MAXIMUM DB (Multiple of 20.)",Dbmax
1000  Value=FRACT(Dbmax/20)
1010  IF ABS(Value)>.00001 THEN 990
1020  IF Dbmin>=Dbmax THEN 1020
1030  GOTO 1060
1040  PRINT LIN(1),"Your MINIMUM value >= Your MAXIMUM...Try again"
1050  GOTO 960
1060  PRINT LIN(2),"The DECIBEL RANGE of your PLOT is ";Dbmin;" <=DB<= ";Dbmax
1070  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
1080  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 1110
1090  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 960
1100  GOTO 1070
1110  PRINT LIN(1),"Always hit the CONT key to continue"
1120  PAUSE
1130  Log_interval=LGT(Wmax)-LGT(Wmin)
1140  Y_interval=(Dbmax-Dbmin)/20
1150  Ymin=Dbmin
1160  Sf=20
1170  Xtitle$="Frequency, rad/sec"
1180  Ytitle$="Magnitude, dbs"
1190  GOSUB Logplt
1200  Istart=1
1210  FOR Decade=0 TO Log_interval
1220    FOR Interval=1 TO 9
1230    Omega=Wmin*10.0^(Decade+LGT(Interval))
1240    Sumzero=0
1250    IF Nzeros=0 THEN 1290
1260    FOR I=1 TO Nzeros
1270     Sumzero=Sumzero+20*LGT(SQR(Zr(I)^2+(Omega+Zi(I))^2))
1280    NEXT I
1290    Sumzero=Sumzero+20*LGT(K)
1300  Sumpole=0
1310    FOR I=1 TO Npoles
1320     Sumpole=Sumpole+20*LGT(SQR(Pr(I)^2+(Omega+Pi(I))^2))
1330    NEXT I
1340    Db=Sumzero-Sumpole
1350    Value=(Db-Dbmin)/20
1360    GOSUB Plot_test
1370    NEXT Interval
1380  NEXT Decade
1390  PAUSE
```

```
1400  EXIT GRAPHICS
1410  PRINT LIN(E(2))
1420  PRINT "For the PHASE BODE PLOT, specify a PHASE ANGLE RANGE you"
1430  PRINT "wish to plot over. Ex :-90<=PHASE<=135..Must be a multiple of 45."
1440  INPUT "Input MINIMUM PHASE ANGLE in degrees (Multiple of 45).",Phasemin
1450  Value=FRACT(Phasemin/45)
1460  IF ABS(value)>.00001 THEN 1440
1470  INPUT "Input MAXIMUM PHASE ANGLE (Multiple of 45).",Phasemax
1480  Value=FRACT(Phasemax/45)
1490  IF ABS(Value)>.00001 THEN 1470
1500  IF Phasemin>=Phasemax THEN 1520
1510  GOTO 1540
1520  PRINT LIN(1),"Your MINIMUM value >= Your MAXIMUM...Try again"
1530  GOTO 1440
1540  PRINT LIN(1),"PHASE ANGLE RANGE of plot:";Phasemin;" <=PHASE<= ";Phasemax
1550  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
1560  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 1590
1570  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 1440
1580  GOTO 1550
1590  Y_interval=(Phasemax-Phasemin)/45
1600  Ymin=Phasemin
1610  SF=45
1620  Xtitle$="Frequency, rad/sec"
1630  Ytitle$="Phase Angle, deg"
1640  GOSUB Logplt
1650  FOR Decade=0 TO Log_interval
1660    FOR Interval=1 TO 9
1670    Omega=wmin*10.0^(Decade+LGT(Interval))
1680    Sumzero=0
1690    Nn=Nzeros
1700    IF Nzeros=0 THEN 1770
1710    FOR I=1 TO Nn
1720    Ar(I)=Zr(I)
1730    Ai(I)=Zi(I)
1740    NEXT I
1750    GOSUB Angle_test
1760    Sumzero=Sum
1770    Nn=Npoles
1780    FOR I=1 TO Nn
1790    Ar(I)=Pr(I)
1800    Ai(I)=Pi(I)
1810    NEXT I
1820    GOSUB Angle_test
1830    Sumpole=Sum
1840    Phase=Sumzero-Sumpole
1850    Value=(Phase-Phasemin)/45
1860    Itime=0
1870    GOSUB Plot_test
1880    NEXT Interval
1890  NEXT Decade
1900  PAUSE
1910  EXIT GRAPHICS
1920  IF Iplot=1 THEN 2010
1930  INPUT "Do you like to plot on the X-Y PLOTTER (Y/N)?",P$
1940  IF (P$="Y") OR (P$="y") THEN 1970
1950  IF (P$="N") OR (P$="n") THEN 2010
1960  GOTO 1930
1970  PLOTTER IS "9872A"
1980  OUTPUT 705;"VS4;"
1990  Iplot=1
2000  GOTO 640
2010  INPUT "Do you like to draw its NYQUIST PLOT (Y/N)?",V$
2020  IF (V$="Y") OR (V$="y") THEN 2050
2030  IF (V$="N") OR (V$="n") THEN 170
2040  GOTO 2010
2050  Type$="NYQUIST"
2060  Iplot=0
2070  GOTO 640
2080  GOSUB Polarplot
2090  Istart=1
2100  FOR Decade=0 TO 5
```

```
2110  Con=10.0^(Decade-1)
2120  Del=(10.0^Decade-Con)/100
2130   FOR Interval=0 TO 99
2140   Omega=Con+Interval*Del
2150   Sumzero=1
2160   IF Nzeros=0 THEN 2200
2170   FOR I=1 TO Nzeros
2180   Sumzero=Sumzero*SQR(Zr(I)^2+(Omega+Zi(I))^2)
2190   NEXT I
2200   Sumzero=Sumzero*K
2210   Sumpole=1
2220   FOR I=1 TO Npoles
2230   Sumpole=Sumpole*SQR(Pr(I)^2+(Omega+Pi(I))^2)
2240   NEXT I
2250   Maggh=Sumzero/Sumpole
2260   IF (Maggn<Ghmin) OR (Maggn>Ghmax) THEN 2560
2270   Value=LGT(Maggn)-LGT(Ghmin)
2280   IF Maggh<1 THEN Value=ABS(LGT(Ghmin))+LGT(Maggh)
2290   Sumzero=0
2300   IF Nzeros=0 THEN 2380
2310   Nn=Nzeros
2320   FOR I=1 TO Nn
2330   Ar(I)=Zr(I)
2340   Ai(I)=Zi(I)
2350   NEXT I
2360   GOSUB Angle_test
2370   Sumzero=Sum
2380   Nn=Npoles
2390   FOR I=1 TO Nn
2400   Ar(I)=Pr(I)
2410   Ai(I)=Pi(I)
2420   NEXT I
2430   GOSUB Angle_test
2440   Sumpole=Sum
2450   Phase=Sumzero-Sumpole
2460   DEG
2470   X=Value*COS(Phase)
2480   Y=Value*SIN(Phase)
2490   RAD
2500   IF Istart=1 THEN 2530
2510   PLOT X,Y,-1
2520   GOTO 2570
2530   MOVE X,Y
2540   Istart=0
2550   GOTO 2570
2560   Istart=1
2570   NEXT Interval
2580  NEXT Decade
2590  PAUSE
2600  EXIT GRAPHICS
2610  IF Iplot=1 THEN 2700
2620  INPUT "Do you like to plot on the X-Y PLOTTER (Y/N)?",W$
2630  IF (W$="Y") OR (W$="y") THEN 2660
2640  IF (W$="N") OR (W$="n") THEN 2700
2650  GOTO 2620
2660  PLOTTER IS "9872A"
2670  OUTPUT 705;"VS4;"
2680  Iplot=1
2690  GOTO 640
2700  INPUT "Do you like to draw its BODE PLOT (Y/N)?",V$
2710  IF (V$="Y") OR (V$="y") THEN 2740
2720  IF (V$="N") OR (V$="n") THEN 170
2730  GOTO 2700
2740  Type$="BODE"
2750  Iplot=0
2760  GOTO 640
2770  STOP
2780 Plot_test:  !
2790 IF Iplot=0 THEN 2830
2800 ! INPUT "Which pen do you like for the plot (1-4)",Ipen
```

```
2810 ! IF (Ipen<1) OR (Ipen>4) THEN 2912
2820 ! PEN Ipen
2830     IF Value<0 THEN 2860
2840     IF Value>Y_interval THEN 2890
2850     GOTO 2920
2860     MOVE Decade+LGT(Interval),0
2870     Istart=1
2880     GOTO 2980
2890     MOVE Decade+LGT(Interval),Y_interval
2900     Istart=1
2910     GOTO 2980
2920     IF Istart<>0 THEN 2960
2930     Istart=0
2940     DRAW Decade+LGT(Interval),Value
2950     GOTO 2980
2960     Istart=0
2970     MOVE Decade+LGT(Interval),Value
2980     RETURN
2990 Zpread: FOR I=1 TO Nn
3000  PRINT Zp$;I;" REAL ="
3010  INPUT Ar(I)
3020  PRINT Zp$;I;" IMAGINARY ="
3030  INPUT Ai(I)
3040  PRINT Zp$;I;" = ";Ar(I);" + j";Ai(I)
3050  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
3060  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 3090
3070  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 3000
3080  GOTO 3050
3090  NEXT I
3100  RETURN
3110 Logplt:  !
3120 IF Iplot=1 THEN 3140
3130  PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
3140  GRAPHICS
3150  LIMIT 0,184,0,140
3160  LOCATE 20,120,20,90
3170  SCALE 0,Log_interval,0,Y_interval
3180  LINE TYPE 3
3190  AXES 0,1,0,0,1,1,200
3200  LINE TYPE 1
3210  FRAME
3220 Logrithmic:  !
3230  FOR Decade=0 TO Log_interval
3240    FOR Interval=1 TO 9
3250    MOVE Decade+LGT(Interval),0
3260    DRAW Decade+LGT(Interval),150
3270    NEXT Interval
3280  MOVE Decade,0
3290  DRAW Decade,150
3300  NEXT Decade
3310 Log_labels:  !
3320  LORG 6
3330  FOR Decade=0 TO Log_interval
3340  CSIZE 4
3350  MOVE Decade,-.4
3360  Position=Wmin*10.0^Decade
3370  LABEL USING "M4D.DD";Position
3380  IF Decade=Log_interval THEN 3440
3390  CSIZE 2
3400    FOR Interval=2 TO 9
3410    MOVE Decade+LGT(Interval),-.05
3420    LABEL USING "KX";Interval
3430    NEXT Interval
3440  NEXT Decade
3450 Lin_labels:  !
3460  CSIZE 4
3470  LORG 8
3480  FOR Y_axis=0 TO Y_interval
3490  MOVE .01,Y_axis
3500  Position=Ymin+Sf*Y_axis
3510  LABEL USING "K,X";Position
```

```
3520  NEXT Y_axis
3530 Text:  !
3540  DEG
3550  LORG 3
3560  SETGU
3570  MOVE 50,3
3580  LABEL Xtitle$
3590  MOVE 7,40
3600  LORG 2
3610  LDIR 90
3620  LABEL Ytitle$
3630  RAD
3640  SETUU
3650  LDIR 0
3660  RETURN
3670 Angle_test:  !
3680  Sum=0
3690  FOR I=1 TO Nn
3700  IF Ar(I)=0 THEN 3760
3710  DEG
3720  Angle=ATN((Omega+Ai(I))/Ar(I))
3730  RAD
3740  IF Ar(I)<0 THEN 3790
3750  GOTO 3810
3760  Angle=90
3770  IF Omega+Ai(I)<0 THEN Angle=-90
3780  GOTO 3810
3790  IF Omega+Ai(I)<0 THEN Angle=Angle-180
3800  IF Omega+Ai(I)>0 THEN Angle=Angle+180
3810  Sum=Sum+Angle
3820  NEXT I
3830  RETURN
3840 Polarplot:  !
3850  PRINT LIN(E(2)),"The NYQUIST PLOT is a polar plot in which you will"
3860  PRINT "specify the MAGNITUDE RANGE of the transfer function."
3870  PRINT "Due to space & clarity a maximum of 3 DECADES can be covered."
3880  PRINT LIN(1),"Examples: 0.1<=MAGNITUDE<=100 or 100<=MAGNITUDE<=100000"
3890  PRINT LIN(1),"Remember: To get the unit circle ,1.0 must be enclosed by"
3900  PRINT "your limits."
3910  PRINT LIN(1),"The NYQUIST PLOT covers 600 points in a FREQUENCY RANGE 0.1<

=100000,"
3920  PRINT "so it may make several MINUTES to develop."
3930  INPUT "What is the MINIMUM MAGNITUDE of your plot (Must be a power of 10)"

min
3940  IF Ghmin<0 THEN 3930
3950  Value=FRACT(LGT(Ghmin))
3960  IF ABS(Value)>.0000001 THEN 3930
3970  INPUT "What is the MAXIMUM MAGNITUDE of your plot (Must be a power of 10.)

hmax
3980  IF Ghmax<0 THEN 3970
3990  Value=FRACT(LGT(Ghmax))
4000  IF ABS(Value)>.0000001 THEN 3970
4010  PRINT PAGE
4020  IF Ghmin>=Ghmax THEN 4090
4030  IF LGT(Ghmax)-LGT(Ghmin)>3 THEN 4110
4040  PRINT LIN(1),"MAGNITUDE RANGE of plot is ";Ghmin;" <=MAGNITUDE<= ";Ghmax
4050  INPUT "Is this correct (Y/N)?",Gonogo$
4060  IF (Gonogo$="Y") OR (Gonogo$="y") THEN 4130
4070  IF (Gonogo$="N") OR (Gonogo$="n") THEN 3930
4080  GOTO 4050
4090  PRINT LIN(1),"Your MINIMUM value >= Your MAXIMUM...Try again"
4100  GOTO 3930
4110  PRINT LIN(2),"You have chosen more than 3 DECADES...Try again"
4120  GOTO 3930
4130  PRINT LIN(1),"Always hit the CONT key to continue."
```

```
4140  PAUSE
4150  Ndecade=LGT(Ghmax)-LGT(Ghmin)
4160  IF Iplot=1 THEN 4180
4170  PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
4180  GRAPHICS
4190  LOCATE 20,106,8,94
4200  SCALE -Ndecade,Ndecade,-Ndecade,Ndecade
4210  LINE TYPE 3
4220 Logcircles:  !
4230  MOVE 0,0
4240  DEG
4250  FOR Decade=0 TO Ndecade
4260  FOR Interval=1 TO 9
4270  IF (Decade=0) AND (Interval=1) THEN 4360
4280  MOVE Decade+LGT(Interval),0
4290  LINE TYPE 3
4300  FOR Angle=0 TO 360 STEP 15
4310  X=(Decade+LGT(Interval))*COS(Angle)
4320  Y=(Decade+LGT(Interval))*SIN(Angle)
4330  DRAW X,Y
4340  NEXT Angle
4350  IF (Decade=Ndecade) AND (Interval=1) THEN 4370
4360  NEXT Interval
4370  NEXT Decade
4380  LINE TYPE 1
4390  FOR Angle=0 TO 360 STEP 15
4400  MOVE 0,0
4410  PDIR Angle
4420  RPLOT Ndecade,0,-1
4430  NEXT Angle
4440  MOVE 0,0
4450  LORG 6
4460  FOR Decade=0 TO Ndecade
4470  MOVE Decade,-.05
4480  Number=Ghmin*10.0^Decade
4490  LABEL USING "M4D.DDD";Number
4500  NEXT Decade
4510  LORG 2
4520  CSIZE 2.5
4530  FOR Angle=0 TO 345 STEP 15
4540  LDIR Angle
4550  MOVE (Ndecade+.05)*COS(Angle),(Ndecade+.05)*SIN(Angle)
4560  LABEL Angle
4570  NEXT Angle
4580  LDIR 0
4590  RETURN
```

Example

```
This program constructs BODE & NYQUIST plots for CONT. & DIS.-TIME
transfer functions of up to 10 poles & 10 zeros. Functcons must
be of the form   K(s+Z1)(s+Z2).../(s+P1)(s+P2)
 OR    K(z+Z1)(z+Z2).../(z+P1)(z+P2)  , Where K is the GAIN,
Z's are the zeros & -P's are the poles.

All poles & zeros should be in first-order form. Those which
are not should be factored until they are. Multiple poles or zeros
should be entered as if they were separate.

You will be asked to enter information after which you should hit
the CONT key to continue.
```

```
You have asked for BODE plots

Your function has  1  zero(s) &  3  pole(s)

The GAIN of the system is  1000

Enter the :-ZEROS in complex form. If either the real or
imaginary part is 0.0, enter as such. Rememinder : The -ZERO in a
term such as (s+3-j2) or (z+3-j2) is 3-j2.(Note:-ZERO=0=0+j0)

-Z 1  REAL =
-Z 1  IMAGINARY =
-Z 1  =  3  + j 0

Enter the :-POLES in complex form. If either the real or
imaginary part is 0.0, enter as such. Reminder : The pole in a
term such as (s+3-j2) or (z+3-j2) is 3-j2.(Note:-POLE=0=0+j0)

-P 1  REAL =
-P 1  IMAGINARY =
-P 1  =  0  + j 0
-P 2  REAL =
-P 2  IMAGINARY =
-P 2  =  12  + j 0
-P 3  REAL =
-P 3  IMAGINARY =
-P 3  =  50  + j 0

Transfer function summary for BODE plots

The GAIN is  1000
The :-ZEROS are

-Z 1 =  3  +j 0

The -POLES are


-P 1  =  0  +j 0
-P 2  =  12  +j 0
-P 3  =  50  +j 0


Hit the CONT key to continue


Specify a FREQUENCY RANGE you wish to plot over
Example: 0.1<=W<=1000.


The FREQUENCY RANGE of your plot is  .1  <=W<=  1000

For the MAGNITUDE BODE PLOT,Specify a DECIBEL RANGE you
wish to plot over. Example: -40<=DB<=60..Must be a multiple of 20.
```

```
The DECIBEL RANGE of your PLOT is -60  <=DB<=  40

Always hit the CONT key to continue
For the PHASE BODE PLOT,specify a PHASE ANGLE RANGE you wish
to plot over  Example:-90<=PHASE<=135..Must be a multiple of 45.

The PHASE ANGLE RANGE of your plot is -180  <=PHASE<= -45


Transfer function summary for BODE plots

The GAIN is  1000
The -ZEROS are

-Z 1 =  3  +j 0

The -POLES are


-P 1  =  0  +j 0
-P 2  =  12  +j 0
-P 3  =  50  +j 0


Hit the CONT key to continue


Transfer function summary for BODE plots

The GAIN is  1
The -ZEROS are


The -POLES are


-P 1  =  1  +j 0
-P 2  =  2  +j 0
-P 3  =  5  +j 0


Hit the CONT key to continue


Specify a FREQUENCY RANGE you wish to plot over
Example: 0.1<=W<=1000.

The FREQUENCY RANGE of your plot is  .1  <=W<=  100

For the MAGNITUDE BODE PLOT,Specify a DECIBEL RANGE you
wish to plot over. Example: -40<=DB<=60..Must be a multiple of 20.

The DECIBEL RANGE of your PLOT is -60  <=DB<=  0
```

THE ROOT LOCUS METHOD

```
10   !      PROGRAM NAME : "ROOTLC" PROG
20   !       THIS PROGRAM DRAWS THE ROOT LOCUS OF A CONTINUOUS- OR
30   !       DISCRETE-TIME SYSTEM FROM THEIR Laplace- OR Z-transform
40   PRINT "  This program draws the ROOT LOCUS of a continuous- &"
50   PRINT "    discrete-time system from their Laplace- or Z-transform"
60   INPUT "Have you LINKED SUB <<Rootfd>>(Y/N)",Q$
70   IF (Q$="Y") OR (Q$="y") THEN 110
80   IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 100
90   GOTO 60
100  LINK "Rootfd",3130,110
110  DEG
120  PLOTTER IS "GRAPHICS"
130  SCALE -11,11,-11,11
140  INPUT "Order of the System?",N
150  PRINT LIN(1),"System Order=";N
160  IF N<=0 THEN 140
170  INPUT "Case # 1=CONTINUOUS & 2=DISCRETE",Icase
180   CALL Root(N,Plot$,Icase)
190  OFF KEY #0
200  BEEP
210  IF Plot$<>"9872A" THEN 240
220  PEN 0
230  GOTO 260
240  INPUT "Do you like to dump the GRAPHICS(Y/N)",Ans$
250  IF Ans$="Y" THEN DUMP GRAPHICS
260  END
270  SUB Root(N,Plot$,Icase)
280  DIM Rroot(1:N),Iroot(1:N),Rcoef(0:N),Icoef(0:N),Save(0:N)
290  DIM R(0:N),Rl(0:N),Ic(0:N),Rc(0:N),Last(0:N),Lastl(0:N)
300  DIM Arr(0:N),Arrl(0:N),Savel(0:N),Save2(0:N),Irool(0:N)
310  DIM Rrool(0:N)
320  ON KEY #0 GOTO 1450
330  Itmax=100
340  Tola=Tolf=.001
350  IF Icase=1 THEN 380
360  PRINT "Coefficients: [(Rcoef(0)+Icoef(0)*K)+(Rcoef(1)+Icoef(1)*K)*z^1+...]"
370  GOTO 390
380  PRINT "Coefficients: [(Rcoef(0)+Icoef(0)*K)+(Rcoef(1)+Icoef(1)*K)*s^1+...]"
390  PRINT LIN(1),SPA(8),"Rcoef","  Icoef",LIN(1)
400  FOR I=N TO 0 STEP -1
410     DISP "Rcoef(";I;")=";
420     INPUT Rcoef(I)
430     Save(I)=Rcoef(I)
440     DISP "Icoef(";I;")=";
450     INPUT Icoef(I)
460     Savel(I)=Icoef(I)
470     PRINT USING 490;Rcoef(I),Icoef(I)
480  NEXT I
490  IMAGE 3X,MZ.4DE,5X,MZ.4DE
500  LINPUT "CHANGES (Y/N)",C$
510  IF (C$="N") OR (C$="n") THEN 650
520  IF (C$="Y") OR (C$="y") THEN 540
530  GOTO 500
540  INPUT "Coefficient number",I
550  IF (I<0) OR (I>N) THEN 540
560  DISP "Rcoef(";I;")=";
570  INPUT Rcoef(I)
580  Save(I)=Rcoef(I)
590  DISP "Icoef(";I;")=";
600  INPUT Icoef(I)
610  Savel(I)=Icoef(I)
620  PRINT USING 630;I,Rcoef(I),I,Icoef(I)
630  IMAGE "Rcoef(",DDD,")=",MZ.4DE,5X,"Icoef(",DDD,")=",MZ.4DE
640  GOTO 500
650  INPUT "Do you like to use the CRT or 9872A as the PLOTTER",Plot$
660  IF (Plot$="CRT") OR (Plot$="9872A") THEN 700
670  BEEP
680  PRINT "Answer:  Either  'CRT' or '9872A'"
690  GOTO 650
700  IF Plot$="CRT" THEN PLOTTER IS "GRAPHICS"
```

```
710  IF Plot$="9872A" THEN PLOTTER IS "9872A"
720  Kmax=100
730  Step=.01
740  MAT R=ZER
750  IF Plot$="CRT" THEN GRAPHICS
760  Num=0
770  FOR I=N TO 0 STEP -1
780  Ic(I)=0
790  IF (Icoef(I)<>0) AND (Numl=0) THEN Numl=I
800  Rc(I)=Icoef(I)
810  NEXT I
820  IF Numl=0 THEN 840
830  CALL Rootfd(Numl,Rc(*),Ic(*),Tola,Tolf,Itmax,Rrool(*),Irool(*))
840  Count=0
850  FOR I=0 TO N
860  Last(I)=Lastl(I)=Arr(I)=Arrl(I)=0
870  NEXT I
880  Ijkl=-Step
890  Itime=-1
900  Ijkl=Ijkl+Step
910  Itime=Itime+1
920  FOR Ijkl1=0 TO N
930  Rcoef(Ijkl1)=Save(Ijkl1)+Ijkl*Savel(Ijkl1)
940  Rcoef(Ijkl1)=Save(Ijkl1)+Ijkl*Savel(Ijkl1)
950  Icoef(Ijkl1)=0
960  NEXT Ijkl1
970  CALL Rootfd(N,Rcoef(*),Icoef(*),Tola,Tolf,Itmax,Rroot(*),Iroot(*))
980  FOR L=1 TO N
990  Save2(L)=0
1000 NEXT L
1010 IF Ijkl=0 THEN GOSUB First
1020 FOR I=1 TO N
1030 Iroot=I
1040    IF Ijkl<>0 THEN 1100
1050    GOSUB Box
1060    IF (I<>N) OR (Plot$="CRT") THEN 1300
1070    INPUT "Which pen do you like to use to PLOT",Pen
1080    PEN Pen
1090    GOTO 1300
1100    Dif=10
1110    FOR J=1 TO N
1120    IF I=1 THEN 1160
1130    FOR L=1 TO I-1
1140    IF J=Save2(L) THEN 1200
1150    NEXT L
1160    Dif2=SQR((R(J)-Rroot(I))^2+(Rl(J)-Iroot(I))^2)
1170    IF Dif<Dif2 THEN 1200
1180    Dif=Dif2
1190    Iroot=J
1200    NEXT J
1210    Save2(I)=Iroot
1220    IF (ABS(R(Iroot))>Max) OR (ABS(Rl(Iroot))>Max) THEN 1300
1230    FOR J=1 TO Numl
1240    IF (ABS(Rroot(I)-Rrool(J))<.1) AND (ABS(Iroot(I)-Irool(J))<.1) THEN 1300
1250    NEXT J
1260    PLOT R(Iroot),Rl(Iroot),-2
1270    PLOT Rroot(I),Iroot(I),-1
1280    IF (ABS(Rroot(I))>Max) OR (ABS(Iroot(I))>Max) THEN 1300
1290    IF INT(Itime/(5*2^Count))*(5*2^Count)=Itime THEN GOSUB Arrow
1300    R(Iroot)=Rroot(I)
1310    Rl(Iroot)=Iroot(I)
1320    PENUP
1330 NEXT I
1340 FOR I=1 TO N
1350 FOR J=1 TO Numl
1360 IF (ABS(Rroot(I)-Rrool(J))<.5) AND (ABS(Iroot(I)-Irool(J))<.5) THEN 1390
1370 NEXT J
1380 IF (ABS(Rroot(I))<Max) AND (ABS(Iroot(I))<Max) THEN 1410
1390 NEXT I
1400 GOTO 1450
1410 IF INT(Itime/(5*2^Count))*(5*2^Count)=Itime THEN Count=Count+1
```

```
1420 IF Itime<>10 THEN 900
1430 Step=Step*10
1440 GOTO 890
1450 SUBEXIT
1460 Box: MOVE Rroot(I)+.02*Max,Iroot(I)+.02*Max
1470 Arr(I)=Rroot(I)
1480 Arrl(I)=Iroot(I)
1490 IPLOT -.04*Max,-.04*Max,-1
1500 IPLOT .04*Max,0,-2
1510 IPLOT -.04*Max,.04*Max,-1
1520 PENUP
1530 RETURN
1540 Arrow: DEG
1550 FOR J=1 TO N
1560 IF I=1 THEN 1600
1570 FOR L=1 TO I-1
1580 IF J=Save2(L) THEN 1610
1590 NEXT L
1600 IF SQR((Arr(J)-Rroot(I))^2+(Arrl(J)-Iroot(I))^2)<.1*Max THEN RETURN
1610 NEXT J
1620 IF ABS(Iroot(I)-Rl(Iroot))>1E-10 THEN 1650
1630 Ang=0
1640 GOTO 1660
1650 Ang=ATN((Rl(Iroot)-Iroot(I))/(R(Iroot)-Rroot(I)))
1660 IF Rroot(I)-R(Iroot)<0 THEN Ang=Ang+180
1670 PDIR Ang
1680 Arr(Iroot)=Rroot(I)
1690 Arrl(Iroot)=Iroot(I)
1700 IPLOT -.02*Max,.02*Max,-2
1710 IPLOT .02*Max,-.02*Max,-1
1720 IPLOT -.02*Max,-.02*Max
1730 RETURN
1740 First: Max=0
1750 FOR I=1 TO N
1760 IF SQR(Rroot(I)^2+Iroot(I)^2)>Max THEN Max=SQR(Rroot(I)^2+Iroot(I)^2)
1770 NEXT I
1780 FOR I=1 TO Numl
1790 IF SQR(Rrool(I)^2+Irool(I)^2)>Max THEN Max=SQR(Rrool(I)^2+Irool(I)^2)
1800 NEXT I
1810 Max=Max*4
1820 Max=INT(Max/5+.999)*5
1830 IF Max=0 THEN Max=5
1840 LOCATE 12,108,2,98
1850 SHOW -Max,Max,-Max,Max
1860 Int=INT(Max/5)
1870 IF Int=0 THEN Int=1
1880 IF Plot$="CRT" THEN 1910
1890 INPUT "Which pen do you like to use for the AXES?",Pen
1900 PEN Pen
1910 LORG 5
1920 CSIZE 3.0
1930 LINE TYPE 3.0
1940 AXES Int,Int,0,0
1950 IF Icase=1 THEN 2030
1960 DEG
1970 MOVE 1,0
1980 FOR I=0 TO 360 STEP 9
1990 X=COS(I)
2000 Y=SIN(I)
2010 PLOT X,Y,-1
2020 NEXT I
2030 IF Plot$="CRT" THEN 2060
2040 INPUT "Which pen do you like to label the axes(1-4)?",Pen
2050 PEN Pen
2060 LINE TYPE 1
2070 FOR I=-INT(Max/Int)*Int TO INT(Max/Int)*Int STEP Int
2080 MOVE I,-.06*Max
2090 LABEL USING "K";I
2100 MOVE .09*Max,I
2110 IF I>=0 THEN LABEL USING "A,K";"j",I
2120 IF I<0 THEN LABEL USING "A,A,K";"-","j",ABS(I)
```

```
2130 NEXT I
2140 CSIZE 2.5
2150 LORG 3.0
2160 Place=-Max
2170 Fudge=0
2180 Num=0
2190 FOR I=0 TO N
2200 IF Save(I)=0 THEN 2220
2210 Num=Num+1
2220 IF Savel(I)=0 THEN 2240
2230 Num=Num+1
2240 NEXT I
2250 INPUT "Do you like the characteristic polynomial PRINTED OUT?(Y/N)",An$
2260 IF An$="N" THEN 2950
2270 IF Plot$="CRT" THEN 2300
2280 INPUT "Which pen do you like to use to write out the polynomial",Pen
2290 PEN Pen
2300 Place=Place+INT(Num/5)*Int+Int/2
2310 FOR I=N TO 0 STEP -1
2320 MOVE -Max+.5+Fudge*Max/2.3,Place
2330 IF I=N THEN 2640
2340 IF Fudge<4 THEN 2380
2350 Place=Place-Int
2360 Fudge=0
2370 MOVE -Max+.5+Fudge*Max/2.3,Place
2380 IF I=0 THEN 2850
2390 IF (Save(I)<>0) AND (Savel(I)<>0) THEN 2560
2400 Fudge=Fudge+1
2410 IF Save(I)=0 THEN 2490
2420 ON Icase GOTO 2430,2460
2430 LABEL USING 2440;Save(I),I
2440 IMAGE "+ ",DDD.DD,"*s^",D
2450 GOTO 2840
2460 LABEL USING 2470;Save(I),I
2470 IMAGE "+ ",DDD.DD,"*z^",D
2480 GOTO 2840
2490 ON Icase GOTO 2500,2520
2500 LABEL USING 2530;Savel(I),I
2510 GOTO 2840
2520 LABEL USING 2540;Savel(I),I
2530 IMAGE "+ ",DDD.DD,"*K*s^",D
2540 IMAGE "+ ",DDD.DD,"*K*z^",D
2550 GOTO 2840
2560 ON Icase GOTO 2570,2590
2570 LABEL USING 2610;Save(I),Savel(I),I
2580 GOTO 2600
2590 LABEL USING 2620;Save(I),Savel(I),I
2600 Fudge=Fudge+2
2610 IMAGE "+ (",DDD.DD,"+",DDD.DD," K)*s^",D
2620 IMAGE "+ (",DDD.DD,"+",DDD.DD," K)*z^",D
2630 GOTO 2840
2640 IF (Save(I)<>0) AND (Savel(I)<>0) THEN 2770
2650 Fudge=Fudge+1
2660 IF Save(I)=0 THEN 2740
2670 ON Icase GOTO 2680,2700
2680 LABEL USING 2710;Save(I),I
2690 GOTO 2840
2700 LABEL USING 2720;Save(I),I
2710 IMAGE DDD.DD"*s^",D
2720 IMAGE DDD.DD"*z^",D
2730 GOTO 2840
2740 LABEL USING 2750;Savel(I),I
2750 IMAGE DDD.DD"*K*S^",D
2760 GOTO 2840
2770 ON Icase GOTO 2780,2800
2780 LABEL USING 2820;Save(I),Savel(I),I
2790 GOTO 2810
2800 LABEL USING 2830;Save(I),Savel(I),I
2810 Fudge=Fudge+2
2820 IMAGE "(",DDD.DD,"+",DDD.DD,"*K)*s^",D
2830 IMAGE "(",DDD.DD,"+",DDD.DD,"*K)*z^",D
```

```
2840 NEXT I
2850 IF (Save(0)<>0) AND (Savel(0)<>0) THEN 2930
2860 IF Save(0)=0 THEN 2900
2870 LABEL USING 2880;Save(0)
2880 IMAGE " +",DDD.DD
2890 GOTO 2950
2900 LABEL USING 2910;Savel(0)
2910 IMAGE " +",DDD.DD,"*K"
2920 GOTO 2950
2930 LABEL USING 2940;Save(0),Savel(0)
2940 IMAGE " +",DDD.DD,"+",DDD.DD,"K"
2950 IF Numl=0 THEN 3080
2960 IF Plot$="CRT" THEN 2990
2970 INPUT "Which pen do you like to use for the ZEROS",Pen
2980 PEN Pen
2990 FOR I=1 TO Numl
3000 MOVE Rrool(I)+.02*Max,Irool(I)
3010 FOR J=1 TO 8
3020 Y=.02*Max*(SIN(360/8*J)-SIN(360/8*(J-1)))
3030 X=.02*Max*(COS(360/8*J)-COS(360/8*(J-1)))
3040 IPLOT X,Y
3050 NEXT J
3060 NEXT I
3070 PENUP
3080 IF Plot$="CRT" THEN 3110
3090 INPUT "Which pen do you like to use for the POLES",Pen
3100 PEN Pen
3110 RETURN
3120 SUBEND
```

Examples

```
This program draws the ROOT LOCUS of a continuous- &
 discrete-time system from their Laplace- or Z-transform


System Order= 2
Coefficients: [(Rcoef(0)+Icoef(0)*K)+(Rcoef(1)+Icoef(1)*K)
              *s^1+...]


      Rcoef          Icoef

   1.0000E+00      0.0000E+00
   5.0000E+00      0.0000E+00
   0.0000E+00      1.0000E+00
```

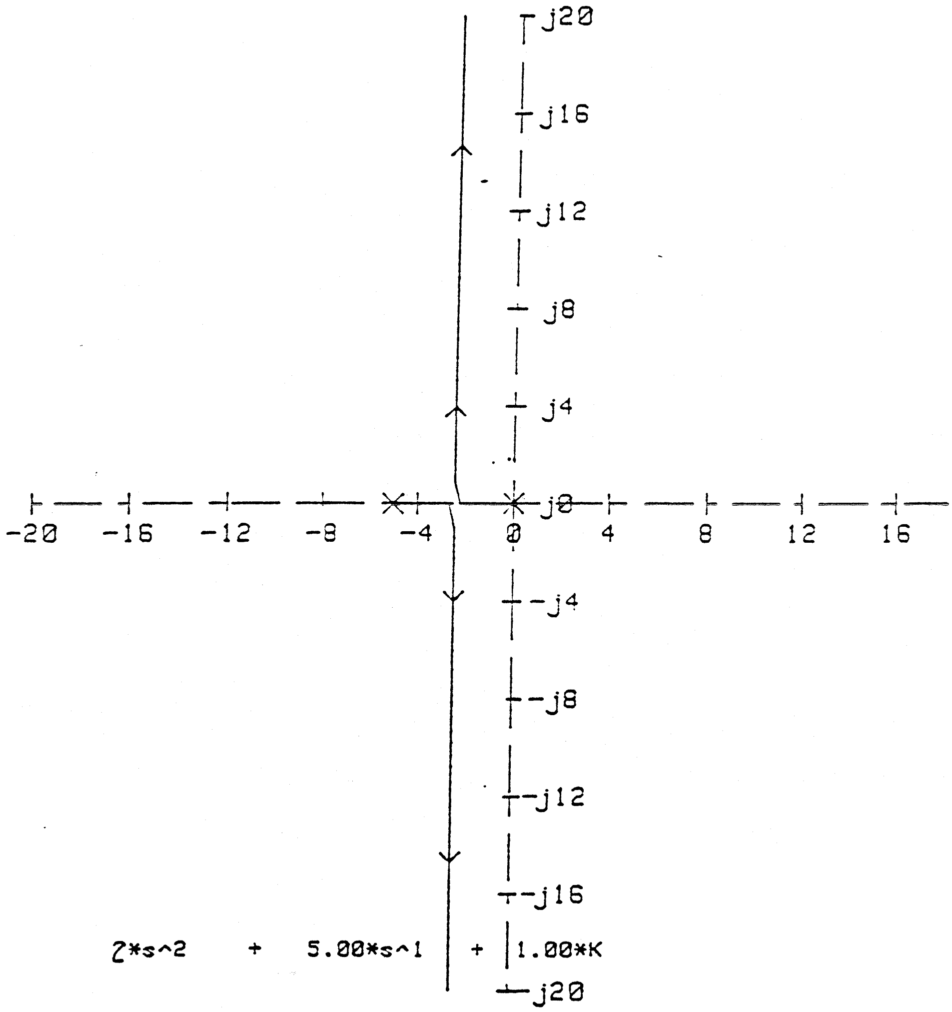


Fig. 7.6.6. Root locus for system of Example 7.6.3

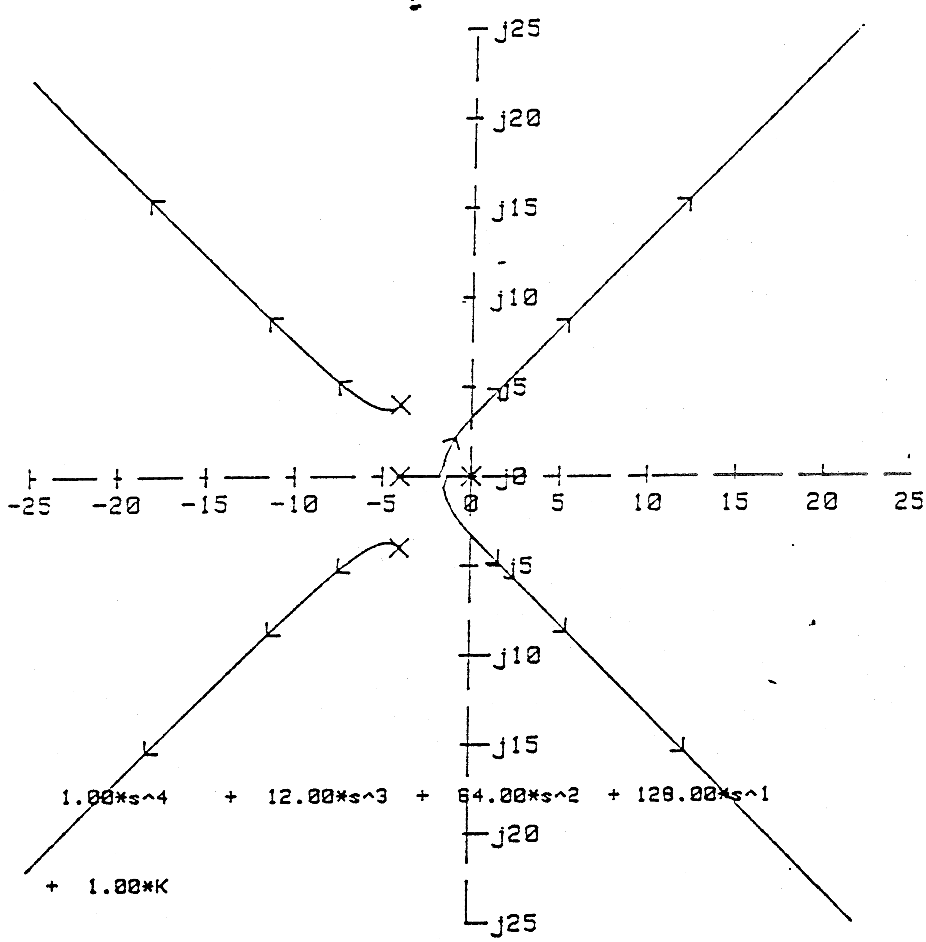

j25
j20
j15
j10
j5
j0
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
j5
j10
j15
j20
j25
1.00*s^4 + 12.00*s^3 + 64.00*s^2 + 128.00*s^1
+ 1.00*K

Fig. 7.6.7.

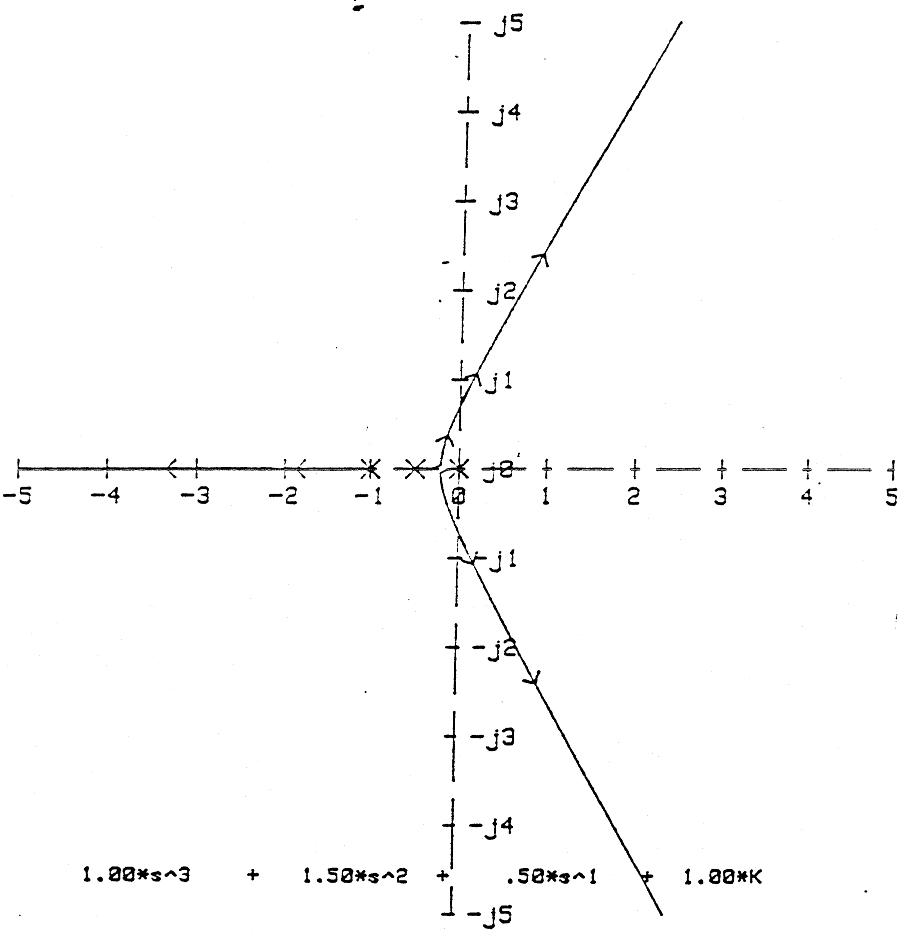

j5
j4
j3
j2
j1
j0
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-j1
-j2
-j3
-j4
-j5
1.00*s^3 + 1.50*s^2 + .50*s^1 + 1.00*K

Fig. 7.6.8.

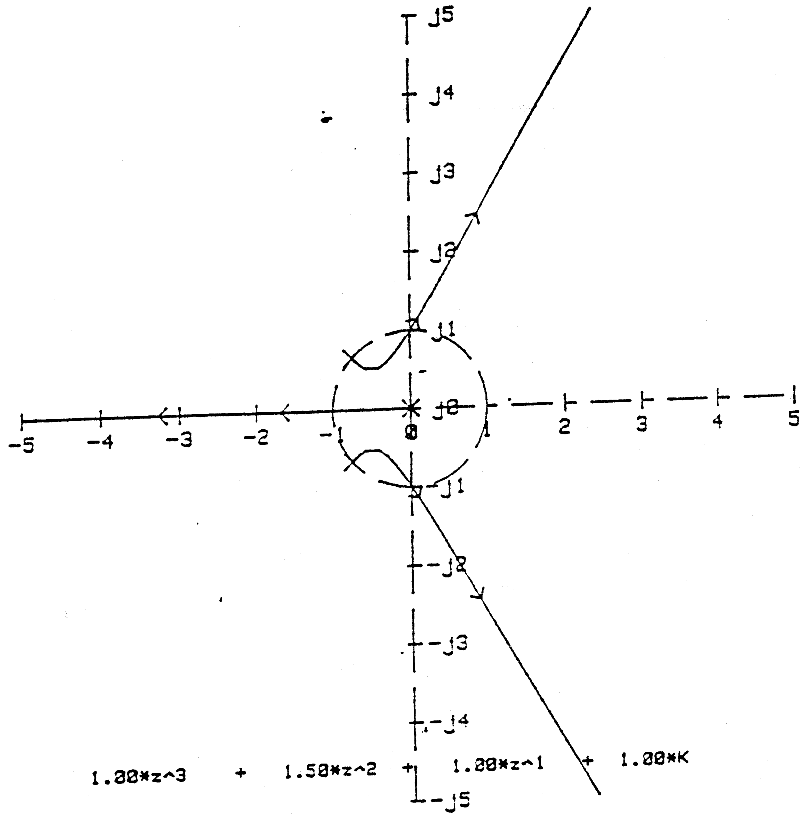
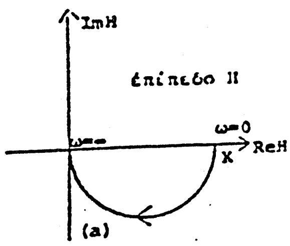

j5
j4
j3
j2
j1
j0
-j1
-j2
-j3
-j4
-j5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
1.00*z^3 + 1.50*z^2 + 1.00*z^1 + 1.00*K

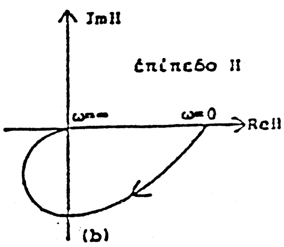
Fig. 7.6.9.

Πίνακας Γνωστών Διαγραμμάτων Nyquist.

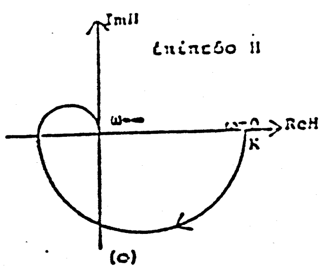
Πίνακας Γνωστών Μετασχηματισμών Laplace.



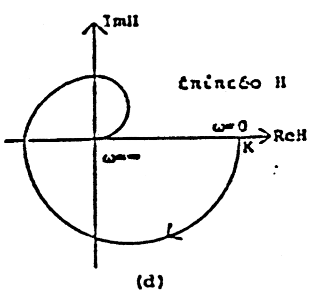
$$H(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)}$$



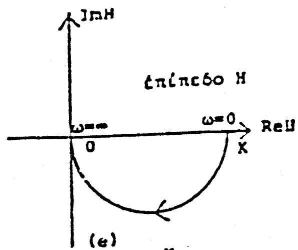
$$H(s) = \frac{K}{(T_2 s+1)(T_1 s+1)}$$



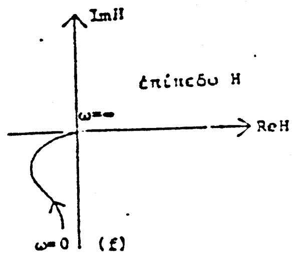
$$H(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_1 s+1)}$$



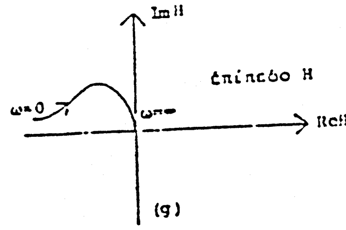
$$H(s) = \frac{K}{(T_4 s+1)(T_3 s+1)(T_2 s+1)(T_1 s+1)}$$



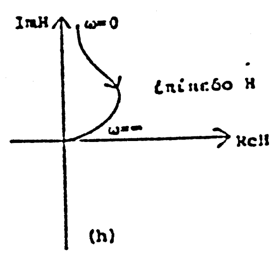
$$H(s) = \frac{K}{(Ts+1)}$$



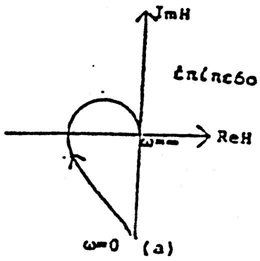
$$H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$



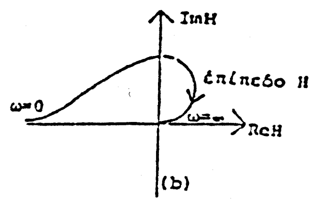
$$H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



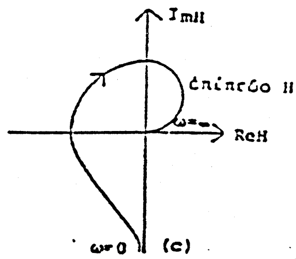
$$H(s) = \frac{K}{s^3(Ts+1)}$$



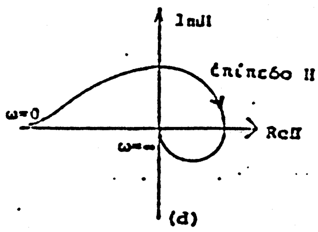
$$H(s) = \frac{K}{s(T_2 s+1)(T_1 s+1)}$$



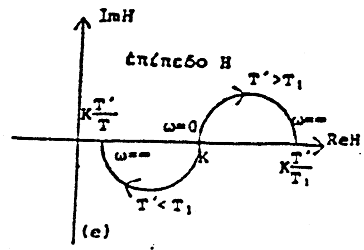
$$H(s) = \frac{K}{s^2(T_2 s+1)(T_1 s+1)}$$



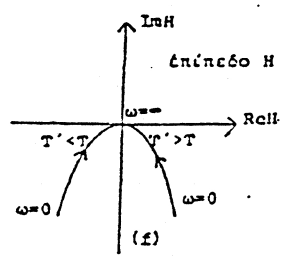
$$H(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$



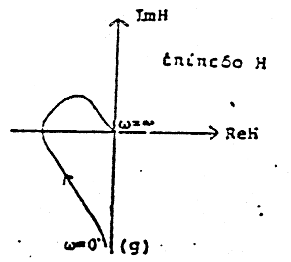
$$H(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$



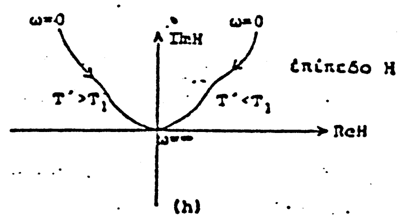
$$H(s) = K\frac{T's+1}{sT_1+1}$$



$$H(s) = K\frac{T's+1}{s(T_1 s+1)}$$



$$H(s) = K\frac{T's+1}{s(T_1 s+1)(T_2+1)}$$



$$H(s) = K\frac{T's+1}{s^2(T_1 s+1)}$$

Common Laplace Transform Pairs

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

$u(t) - u(t-a) \leftrightarrow \frac{1-e^{-as}}{s}, \quad a > 0$

$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}, \quad c > 0$

$e^{-bt} \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad b$ real or complex

$t^n e^{-bt} \leftrightarrow \frac{n!}{(s+b)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\cos^2 \omega t \leftrightarrow \frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$

$\sin^2 \omega t \leftrightarrow \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$

$e^{-bt}\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s+b}{(s+b)^2+\omega^2}$

$e^{-bt}\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+b)^2+\omega^2}$

$t\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

$t\sin \omega t \leftrightarrow \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Properties of the Laplace Transform

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s)$
Right shift in time	$x(t - c)u(t - c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s), \quad c > 0$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$
Multiplication by a power of t	$t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s), \quad n = 1, 2, \ldots$
Multiplication by an exponential	$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$, a real or complex
Multiplication by $\sin \omega t$	$x(t) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s + j\omega) - X(s - j\omega)]$
Multiplication by $\cos \omega t$	$x(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s + j\omega) + X(s - j\omega)]$
Convolution	$(x * v)(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$
Integration	$x^{(-1)} \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$
Differentiation in the time domain	$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0)$
Second derivative	$\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$
nth derivative	$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$
Initial-value theorem	$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ $\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2X(s) - sx(0)]$ $x^{(n)}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^{n+1}X(s) - s^nx(0) - s^{n-1}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(n-1)}(0$
Final-value theorem	If $\lim_{t\to\infty} x(t)$ exists, then $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$